Három egyszerű népességdinamikai modell

1. Bevezetés

Ebben az írásban a népességdinamika modellezésébe szeretném bevezetni azokat az igényes középiskolásokat, akiket érdekel a társadalmi jelenségek matematikai megfogalmazása.

Az egyes országok népességének (létszámának és korösszetételének) alakulása gazdaságilag és politikailag egyaránt érdekes. Miközben a harmadik világ jelentős részében még tart a népességrobbanás, a fejlett világ egyes országaiban drámai ütemű népességfogyás és öregedés tapasztalható. Például Magyarországon az 1980-as 10,7 milliós népesség-maximum elérése óta ma már 10 millió alá csökkent a létszám. De ennél sokkal súlyosabb a nemzedéki (korosztályi) arányok eltolódása: jelenleg az idősek (60 éven felettiek) aránya 20%, de 2050-re 40% várható. Nem nehéz belátni, hogy ezek a fejlemények feszültségekhez vezetnek a nyugdíj- és az egészségügy területén, bár az optimisták szerint az idősek egészségi állapotának folyamatos javulása nyomán jelentősen emelkedik majd az idősek munkakínálata, s ez enyhíti e feszültségeket.

A társadalmi problémák jelentős részét matematikailag modellezzük, akárcsak a természettudományos problémákat. a) Egy jó modell elősegíti a probléma megértését, és b) a korábbi problémák megoldásában nyert tapasztalatokat alkalmazhatóvá teszi az újabb problémák kezelésében. Hasonlatokkal élve: a) más léptéket várunk egy Budapest-térképtől, mint egy Magyarország-térképtől. Mindkét térkép lehet jó is, rossz is, a céltól függően. Ha Budapestről Debrecenbe autózunk, akkor országos térképre van szükségünk; ha Pestről Budára megyünk, akkor viszont fővárosira. b) Ha tudjuk, hogy mitől függ az inga lengésideje, akkor megértjük az elektromos áramkörök rezgéseit is.

Már láttuk, hogy a demográfia fontos. Azt szeretném igazolni, hogy elméletileg is érdekes, és gazdag modellezési lehetőségei vannak. Három modellt mutatok be. Az első modell annyira egyszerű, hogy alig érdemli meg a modell nevet: az év eleji népesség egyenlő az előző év eleji népességgel + születések − halálozások. Ha feltesszük, hogy mind a születésszám, mind a halálozásszám arányos a népességgel, akkor egyszerűen alakul a népességszám stb.

A második és harmadik modell közös alapfeltevése, hogy az egyes korosztályok ugyanannyi évet fognak át. A második modellel a gyermekek–szülők–nagyszülők nemzedékeinek együttélése írható le. (Természetesen a nagyszülők a szülők szülei, de ezt a bonyodalmat figyelmen kívül hagyhatjuk.) Kulcsszerepet játszanak az átmeneti valószínűségek, amelyek azt mutatják, hogy egy adott gyermeknemzedék hányad része lesz szülő, illetve nagyszülő. A termékenységi együttható pedig azt mutatja, hogy egy átlagos családban hány gyermek van. A harmadik modellben eltekintek az időközi halandóságtól, elhagyom a nagyszülőket, de felbontom a szülőket fiatalabb és idősebb részre. Nemcsak kvalitatív, de kvantitatív eredményekhez jutunk: hogyan függnek a népesség növekedési üteme és korosztályi arányai a túlélési valószínűségektől és a termékenységi együtthatótól?

Az elemzésben először felírjuk az alapösszefüggéseket, majd egyszerűsítésként feltesszük, hogy a termékenységi együtthatók és túlélési valószínűségek időben állandók: ún. stabil népesség. A lineáris differenciaegyenlet-rendszerek elméletet menetközben elmagyarázva, majd alkalmazva, érdekes tételeket mondunk ki és bizonyítunk be. Végül levonok néhány következtetést.

2. Születés és halálozás

Bár elvileg minden pillanatban születik egy csecsemő és meghal egy aggastyán, a gyakorlatban célszerűtlen évesnél finomabb bontású népességmodellekkel dolgoznunk. (Elméleti elemzésben azonban jogosult lehet folytonos koreloszlás alkalmazása is, de az nagyon elbonyolítja a matematikai elemzést.) A legegyszerűbb demográfiai modellben nincsenek korosztályok. Éves keretben dolgozva, jelölje a naptári éveket $t = 0, 1, \ldots$, a születések számát B_t, a halálozásokét D_t, végül a népesség év eleji értékét N_t. Könnyen belátható a következő azonosság:

$$N_{t+1} = N_t + B_t - D_t, \quad t = 0, 1, \ldots .$$

Ha ismerjük a (B_t) és (D_t) sorozatot, és N_0 kezdőértéket, akkor ismert a népesség bármilyen évi értéke.

Kicsit továbbjutunk, ha az adott évbeni születések és a halálozások számát arányosnak vesszük az az év eleji népességszámmal, ahol b_t és d_t rendre a születési és halálozási arányszám: $B_t = b_t N_t$ és $D_t = d_t N_t$. Behelyettesítve a második egyenletet az elsőbe:

$$N_{t+1} = N_t + b_t N_t - d_t N_t = (1 + b_t - d_t) N_t, \quad t = 0, 1, \ldots .$$

Ezzel eljutottunk a legegyszerűbb tételhez.

1. tétel. a) *Ha a születési arányszám minden évben nagyobb mint a halálozási, akkor a népességszám nő.* b) *Ha a születési arányszám minden évben kisebb mint a halálozási, akkor a népességszám csökken.* c) *Ha a születési arányszám minden évben azonos a halálozásival, akkor a népességszám állandó.*

1. táblázat. Születések, halálozások, népesség, Magyarország, ezer fő

év t	Születési szám B_t	Halálozási szám D_t	Népesség N_t
1950	190,4	110,0	9 293
1960	146,5	101,5	9 961
1970	151,8	120,2	10 322
1980	146,7	145,4	10 709
1990	125,7	145,7	10 375
2000	97,6	135,6	10 222
2010	90,3	130,4	10 014

Figyeljük meg, hogy a tételben nem tesszük fel, hogy a születési és halálozási arányok időben változatlanok, csak a különbségük előjeléről beszélünk. A valóságban nem is volna helyes feltenni, hogy ezek az arányok időben változatlanok, hiszen például ha egy ország népességéből eltűnnének a szülőképes nők, akkor a népesség hosszabb távon kihalásra van ítélve. Ideje áttérni egy reálisabb modellre. De még beillesztjük az 1. táblázatot, amely válogatott évekre tartalmazza a hazai népesség szülési, halálozási és állományi adatait. (Ha a táblázattal akarnánk ellenőrizni az alapegyenlet érvényességét, akkor vagy minden évet fel kellett volna tüntetnünk, vagy összesíteni kellett volna az évtizedes születéseket és halálozásokat!)

3. Gyermekek, szülők, nagyszülők

Mostantól kezdve a népességet korosztályokra tagoljuk. A középiskolai keretekre való tekintettel azonban az éves bontásnál jóval durvább tagolással élünk: csak 3 nemzedéket különböztetünk meg. Ebben a modellünkben gyermekeket, szülőket és nagyszülőket különböztetünk meg. Legyen egy elemzési időszak hossza 25 év, ezt régen emberöltőnek nevezték. A naptári időszakok indexe $t = 0, 1, \ldots$.

Legyen a t-edik időszakban a gyermekek száma K_t, a szülőké W_t és a nagyszülőké P_t. A népesség teljes létszáma $N_t = K_t + W_t + P_t$. A demográfusok megkülönböztetik a következő három függőségi hányadost, ahol a szülők létszámához viszonyítják a gyermekek, a nagyszülők, illetve a gyermekek és a nagyszülők létszámát.

Fiatalkori függőségi hányados:

$$k_t = \frac{K_t}{W_t}.$$

Időskori függőségi hányados:

$$p_t = \frac{P_t}{W_t}.$$

Teljes függőségi hányados:

$$d_t = \frac{K_t + P_t}{W_t} = k_t + p_t.$$

Ezek a hányadosok mutatják, hogy milyen teher hárul a szülőkre a gyermekek és a nagyszülők eltartásában. (Az eltartás szó nem azt jelenti, hogy a gyermekek és az idősek henyélők!) Például a gazdasági fejlődés korai szakaszaiban a fiatalkori függőségi hányados nagyon nagy, 1 közeli, nehézzé téve a magas színvonalú kötelező iskolai képzés finanszírozását. A fejlődés késői szakaszában viszont az időskori függőségi hányad nagy, 1 közeli érték, megdrágítva a nyugdíj- és egészségügyi rendszer finanszírozását. A teljes függőségi hányad viszonylag stabil. A 2. táblázat a magyar népességre mutatja be e mutatók alakulását (azonban ideiglenesen lemondva arról a kulcsfeltevésünkről, hogy a korosztályok azonos számú évjáratot tartalmaznak).

2. táblázat. Korosztályi és függőségi hányadok alakulása Magyarországon

Év	Gyermekek aránya	Idősek aránya	Időskori függőségi hányad	Teljes függőségi hányad
t	K_t/N_t	P_t/N_t	p_t	d_t
1970	0,283	0,131	0,224	0,706
2000	0,236	0,146	0,236	0,618
2050	0,189	0,262	0,477	0,821

Megjegyzés: gyermekek: 0–19 év, idősek: 65–. 2050: előrejelzés.

Visszatérünk az azonos számú évjáratokat tartalmazó modellhez. Az adott korosztály létszámcsökkenését a 0 és 1 közti α_t és ω_t pozitív számok, az ún. *túlélési valószínűségek* határozzák meg, amelyek feltevésünk szerint kívülről adottak:

$$W_t = \alpha_t K_{t-1} \quad \text{és} \quad P_t = \omega_t W_{t-1}.$$

Az időben változó φ_t *termékenységi együttható* pedig kapcsolatot teremt a szülők és a gyermekek száma között:

$$K_t = \varphi_t W_t, \quad \varphi_t > 0.$$

Megjegyezzük, hogy korábban nagyfokú volt a gyermekhalandóság, s ezen belül a csecsemő halandóság. Például 100 évvel ezelőtt hazánkban még minden ötödik csecsemő meghalt 1 éves kora előtt, és még 50 évvel ezelőtt is minden huszadik csecsemő meghalt. Ma már a csecsemőhalandóság gyakorlatilag megszűnt. Magas csecsemőhalandóság esetén félrevezető termékenységi egyenletünk. Hasonló a helyzet a szülői és a nagyszülői halandósággal.

A termékenységi együttható általában tört szám, s ez csak úgy értelmezhető, hogy vannak családok, ahol 0, 1, 2 stb. számú csecsemő születik, és ezek gyakorisága időben változik, jelük $f_{0,t}$, $f_{1,t}$, $f_{2,t}$, $f_{3,t}$. Képletben:

$$\varphi_t = f_{1,t} \cdot 1 + f_{2,t} \cdot 2 + f_{3,t} \cdot 3 + \dots .$$

A továbbiakban e bonyodalommal nem foglalkozunk.

Szokás *korfáról* beszélni, amikor a vízszintes tengelyre mérjük föl a korosztályok létszámát, és a függőlegesre a korosztály életkorát, balra a nőkét, jobbra a férfiakét. Mi az egyszerűség kedvéért egynemű népességet modellezünk, elhanyagolva a férfi és női szaporodási szerepek közti alapvető különbségeket. Bármilyen visszásnak látszik e feltevés, a demográfiában nagyon elfogadott és hasznos. Az interneten számos valóságos és képzelt korfát találhatunk.

A rendszer dinamikájának meghatározásához meg kell adnunk két kezdőértéket: W_{-1}-et és W_0-t. Ekkor meghatározható $P_0 = \omega_0 W_{-1}$ és $K_0 = \varphi_0 W_0$ stb. De mélyebb értelemben W_{-1}-re nincs igazából szükségünk. Ha ismert W_0, akkor ismert K_0 is, és abból már $t \geq 1$-re minden ismert.

A 3. táblázat szemlélteti az idealizált kínai népességdinamikát, halandóság nélkül: $\alpha_t = 1$ és $\omega_t = 1$. Számolási könnyebbség kedvéért a kezdő időszak szülőinek létszámát vesszük 1 egységnek. Abszolút számokra gondolva 1950-ben Kínának körülbelül 0,5 milliárd lakója volt, jelenleg pedig körülbelül 1,4 milliárd lakója van. Ismert, hogy 1925–1975 között a sokgyermekes család volt tipikus Kínában, vegyünk például 4 gyermeket: $\varphi_0 = 2$ volt (egy család 2 felnőttből állt, a férjre és a feleségre 2-2 gyermek jutott). Aztán a Mao Ce-tung halála után a kirakatpereket túlélő kínai politikusok végre valahára felfedezték, hogy egy ilyen gyorsan szaporodó népesség nem fér el Kínában, és hajtűkanyart téve, bevezették az egygyermekes családmodellt, $\varphi_1 = 0,5$-del. De a késleltetés miatt a népességszám egyelőre nem csökken. Nagyon elnagyolt modellünk 2025-ig vár, hogy visszatérjen a kétgyermekes családmodellhez, de akkorra már felére csökkenne a népesség.

3. táblázat. Stilizált kínai népességdinamika

Modell-idő t	Negyed-század –	Termé-kenység φ_t	Gyermek K_t	Szülők létszáma W_t	Nagyszülők P_t	Összesen N_t	Teljes függőségi hányad d_t
−1	1925–	2	2	1	0,5	3,5	2,5
0	1950–	2	4	2	1	7	2,5
1	1975–	0,5	2	4	2	8	1
2	2000–	0,5	1	2	4	7	2,5
3	2025–	1	1	1	2	4	3

A 3. táblázat utolsó oszlopa élesen megvilágítja a kínai gazdasági csoda egyik forrását: az elmúlt évtizedekben a teljes függőségi hányad 2,5-ről ideiglenesen 1-re csökkent, de majd vissza fog térni a magas értékre.

A népességtudományban kiemelkedő szerepet játszik az ún. *stabil népesség* fogalma. Egy népességet stabilnak nevezünk, ha a korosztályi arányai állandók. Képletben:

$$k_t = k_0 \quad \text{és} \quad p_t = p_0, \quad t = 0, 1, \dots,$$

Fontos speciális eset a *stacionárus népesség,* azaz amikor nemcsak az arányok, de maguk a korosztályi létszámok is állandók. Képletben:

$$K_t = K_0 \quad \text{és} \quad P_t = P_0, \quad t = 0, 1, \dots,$$

Legegyszerűbben állandó termékenységi és túlélési paraméterértékekkel lehet stabil népességeket előállítani. Tegyük föl, hogy $\varphi_t = \varphi$, $\alpha_t = \alpha$ és $\omega_t = \omega$.

Ekkor belátható a következő tétel.

2. tétel. *Állandó túlélési és termékenységi paraméterértékek esetén a népesség stabil és a növekedési tényezője* $\nu = \alpha\varphi$. *Ha* $\nu = 1$, *akkor a népesség stacionárius.*

Bizonyítás. Behelyettesítve $W_t = \alpha K_{t-1}$-t $K_t = \varphi W_t$-be: $K_t = \varphi\alpha K_{t-1}$, azaz a gyermekszám mértani sorozatot alkot, ν hányadossal. A $K_t = \varphi W_t$ termékenységi egyenlet alapján ugyanez igaz a szülők létszámára is. Végül $P_t = \omega W_{t-1}$ szerint az idősek létszáma is ugyanazzal a növekedési ütemmel nő. □

Érdekes a függőségi hányadosok alakulása.

3. tétel. *Stabil népesség esetén a fiatalkori függőségi hányados* $k_t = \varphi$, *az időskori függőségi hányados* $p_t = \omega/(\alpha\varphi)$, *míg a teljes függőségi hányados* $d_t = k_t + p_t$.

Bizonyítás. A fiatalkori függőségi hányados

$$k_t = \frac{\varphi W_t}{W_t} = \varphi.$$

Az időskori függőségi hányados

$$p_t = \frac{P_t}{W_{t-1}} \frac{W_{t-1}}{W_t} = \frac{\omega}{\alpha\varphi}. \qquad \square$$

Érdekes, hogy adott α, ω túlélési valószínűségek mellett a d teljes függőségi hányados a minimumát a

$$\varphi^* = \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}$$

termékenységi együttható esetén éri el. Valóban, a számtani és a mértani közép összehasonlítása alapján

$$d = \varphi + \frac{\omega}{\alpha\varphi} \geq 2\sqrt{\frac{\omega}{\alpha}}$$

teljesül, és a bal oldal a minimumát a két tag egyenlősége esetén éri el, azaz tényleg $\varphi = \varphi^*$.

4. Fiatal és idős szülők modellje

Több szempontból is érdemes módosítani az előbbi modellt, és a szülőkön belül megkülönböztetni a fiatal és az idős szülőket. Ez annak felel meg, hogy az időszak hosszát lerövidítjük 25-ről 15 évre. Az egyszerűség kedvéért eltekintünk a termékenység és a halandóság változásától: a stabil népességre szorítkozunk. Sőt, eltekintünk a halandóságtól, és feltesszük, hogy senki sem hal meg idő előtt. Mint matematikailag felesleges toldaléktól, szintén eltekintünk az idősektől, pontosabban a terméketlen idősektől. A fiatal szülők számát U_t, az idős szülőkét pedig V_t jelöli; a fiatal és az idős szülők termékenységi együtthatóját rendre χ és ψ jelöli.

Újra felírjuk az alapegyenleteket, de most megbontva a két szülői kategóriát.

Túlélési egyenletek:

$$U_t = K_{t-1} \quad \text{és} \quad V_t = U_{t-1} = K_{t-2}.$$

Termékenységi egyenlet:

$$K_t = \chi U_t + \psi V_t, \quad \chi \geq 0, \quad \psi > 0.$$

Az elemzés előtt a 4. táblázattal szemléltetjük modellünket. Legyen $\chi = \psi = 0{,}5$ és $K_{-1} = 60\,000$ és $K_0 = 40\,000$. Látni fogjuk, hogy $\varphi = 1$ miatt a népesség egy stacionárius népességhez tart.

4. táblázat. Számított népességdinamika

Időszak t	Gyermekek K_t	Fiatal szülők U_t	Idős szülők V_t
0	40 000	60 000	–
1	50 000	40 000	60 000
2	45 000	50 000	40 000
3	47 500	45 000	50 000
4	46 250	47 500	45 000
5	46 875	46 250	47 500
6	46 563	46 875	46 250
7	46 719	46 563	46 875
8	46 641	46 719	46 563
9	46 680	46 641	46 719

Akinek jó szeme van, az láthatja, hogy a folyamat tart egy végállapothoz, ahol $K^* = U^* = V^* = 46\ 667$. (A határérték valójában egy végtelen tizedestört: 46 666,666 . . . , de ennek nincs gyakorlati jelentősége.)

Visszatérünk az elméleti elemzéshez. Behelyettesítve a túlélési egyenleteket a termékenységi egyenletbe, egy érdekes rekurziót kapunk az egymást követő gyermekszámok között:

$$K_t = \chi K_{t-1} + \psi K_{t-2}, \quad t = 0,\ 1,\ \ldots \quad K_{-1},\ K_{-0} \quad \text{adott}.$$

Ilyen feladatot először Fibonacci pisai matematikus vizsgált először 1202-ben, de ő nem tudta a megoldást zárt alakban előállítani. Szerencsére 1740 körül Leonhard Euler talált egy viszonylag egyszerű módszert az ún. *másodrendű homogén lineáris rekurzió* megoldására, ezt ismertetjük a következőkben. (Egyébként Euler volt a valaha élt egyik legnagyobb és legtermékenyebb matematikus, a stabil népesség elméletét is ő dolgozta ki.)

Most is mértani sorozat alakjában keressük a megoldást: $K_t = \kappa\lambda^t$, ahol κ és λ valós számok. Behelyettesítjük a feltételezett megoldást a rekurzióba:

$$\lambda^t = \chi\lambda^{t-1} + \psi\lambda^{t-2}.$$

Egyszerűsítés után a

$$\lambda^2 = \chi\lambda + \psi$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek az egyenletnek két különböző valós gyöke van, és ezek lineáris kombinációjaként adódik a megoldás. Pontosabban a következő igaz.

4. tétel. *a) A rekurzió általános (kezdeti értéktől független) megoldása*

$$K_t = \kappa_1\lambda_1^t + \kappa_2\lambda_2^t$$

alakú, ahol $\lambda_{1,2}$ a

$$\lambda^2 - \chi\lambda - \psi = 0$$

másodfokú egyenlet két különböző valós megoldása, valamint κ_1 és κ_2 tetszőleges valós szám.

b) Adott kezdeti feltételek mellett a (κ_1, κ_2) együtthatópár egyértelműen meghatározható a következő lineáris egyenletrendszerből:

$$K_0 = \kappa_1 + \kappa_2 \quad \textit{és} \quad K_{-1} = \kappa_1\lambda_1^{-1} + \kappa_2\lambda_2^{-1}.$$

Bizonyítás. Ha $\chi > 0$ és $\psi > 0$, akkor a gyökök és együtthatók összefüggése alapján $\lambda_1 + \lambda_2 = \chi < 0$ és $\lambda_1\lambda_2 = -\psi < 0$, azaz $\lambda_1 > 0 > \lambda_2 > -\lambda_1$. Ha $\chi = 0$, akkor $\lambda_2 = -\lambda_1$; ha $\psi = 0$, akkor $\lambda_2 = 0$.

a) Ha mindkét λ^t megoldás kielégíti a rekurziót, ekkor tetszőleges lineáris kombinációjuk is kielégíti. *b)* Konstrukciója miatt a választott kombináció kielégíti a két kezdeti feltételt.

Adós maradok annak az igazolásával, hogy más megoldás nincs, ami kétszeres gyök esetén nem is igaz. (Külön bonyodalmat okoz, amikor a másodfokú egyenletnek nincs valós gyöke, de ez is megoldható.) □

Tovább finomítjuk az elemzést. Kizárjuk az atipikus $\chi = 0$ esetet. (A kizárt esetben K_{t+1}/K_t növekedési tényező ciklikusan változik!) Általában nem igaz, hogy a népesség stabil, hiszen két különböző mértani sorozat zavarja egymást. (A kivételes eset $\psi = 0$!) Mivel a negatív gyök abszolút értéke kisebb mint a pozitív gyök, még inkább áll egyre magasabb hatványaikra, tehát az aszimptotikus megoldás $\kappa_1\lambda_1^t$, $\kappa_1 \neq 0$.

Igazoltuk tehát a következő tételt.

5. tétel. *a) Ha $\chi > 0$, akkor a K_t megoldás aszimptotikusan tart a $\kappa_1\lambda_1^t$ pályához, $\kappa_1 > 0$.*

b) Ha $\chi + \psi > 1$, akkor a népesség létszáma növekvő; ha $\chi + \psi < 1$, akkor a népesség létszáma csökkenő; végül ha $\chi + \psi = 1$, akkor a népesség létszáma állandó.

Végül egy érdekes állítást igazolunk, amely megvilágítja, hogy milyen fontos hatással van a stabil népesség növekedési ütemére az, hogy az adott termékenység hogyan oszlik meg a fiatal és az idős szülők között. Az egyszerűség kedvéért továbbra is eltekintünk az idő előtti halálozástól.

6. tétel. *Stabil népességen belül rögzítjük a $\varphi = \chi + \psi$ együttes termékenységi arányszámot. a) Csökkenő népességben $(\varphi < 1)$, minél kisebb a fiatalkorú szülések aránya, annál lassabban csökken a népesség: $\nu(\chi) < 1$ növekvő függvény. b) Növekvő népességben $(\varphi > 1)$, minél kisebb a fiatalkorú szülések aránya, annál lassabban nő a népesség: $\nu(\chi) > 1$ csökkenő függvény. c) Állandó létszámú népességben $(\varphi = 1)$ a születések eloszlása közömbös: $\nu(\chi) = 1$.*

Bizonyítás. Már beláttuk, hogy a ν növekedési tényező másodfokú egyenletünk nagyobbik gyöke:

$$\nu = \frac{\chi + \sqrt{\chi^2 + 4(\varphi - \chi)}}{2}.$$

A $\nu(\chi)$ deriválásával mechanikusan belátható állításunk, de elemi meggondolás is segít.

Vegyünk egy csökkenő stabil népességet. Ebben a korosztályok létszáma monoton időben csökken. A fiatal szülők létszáma kisebb mint az időseké, tehát szerepük csökkenése lassítja a népességszám csökkenési ütemét. □

5. Következtetések

Mondandónk végére értünk. Bemutattunk három népességdinamikai modellt: az elsőben az életkor alig játszott szerepet. A másodikban a szülőkorúak nem voltak megbontva, a harmadikban ketté voltak bontva. A második modell viszonylag egyszerű volt, és annak elemzésekor még arra is volt módunk, hogy a túlélési valószínűségeket és az időskorúakat is figyelemmel kísérjük. A harmadik modellben a másodrendű rekurzió kezelése annyira lefoglalta erőnket, hogy lemondtunk ezekről a bonyodalmakról. Megismerkedtünk viszont egy új technikával, amely elvileg lehetővé teszi, hogy tetszőleges korosztályra bontva elemezzük a népességdinamikai modellt. Ez azonban már felsőbb matematikai ismereteket igényelne, és erről itt lemondtunk.

Simonovits András