I. rész

1. *Egy r sugarú körbe írt ABC háromszögben $AB = r$ és $AC = r\sqrt{3}$. Mekkora a BC oldal?* (*11 pont*)

Megoldás. Az r sugarú kör középpontja legyen a K pont, a keresett BC oldal hossza pedig x. Tudjuk, hogy az AKB háromszög szabályos, vagyis az AB (kisebbik) ívhez tartozó AKB középponti szög 60 fokos. Ezért az ABC háromszög C csúcsánál található belső szög 30 fokos, hiszen ez az előbbi ívhez tartozó egyik kerületi szög.

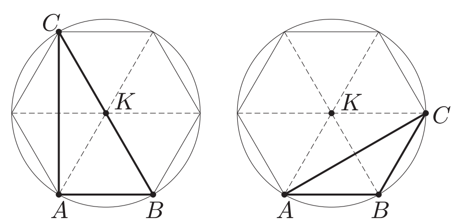
Írjuk fel az ABC háromszögre a koszinusztételt:

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + \left(r\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3} \cdot r \cdot x \cdot \cos 30°, \\ r^2 &= x^2 + 3r^2 - 2\sqrt{3} \cdot r \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 0 &= x^2 - 3rx + 2r^2. \end{aligned}$$

Oldjuk meg ezt az x-re másodfokú egyenletet:

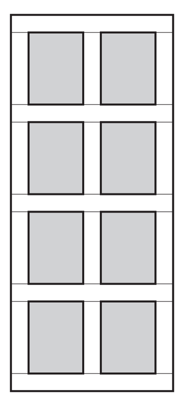
$$x_{1;2} = \frac{3r \pm \sqrt{9r^2 - 8r^2}}{2} = \frac{3r \pm r}{2}.$$

Vagyis $x_1 = 2r$, $x_2 = r$.



A BC oldal lehetséges hossza: $2r$ vagy r.

2. *Egy* 90 cm *széles és* 210 cm *magas, kazettás ajtó vázlatát mutatja az* ábra.



A nyolc egyforma téglalap alakú kazetta pontosan az ajtó lapjának a felét teszi ki. A kazetták közötti és melletti sávok szélessége mindenütt ugyanannyi. Mekkora ez a szélesség? (*13 pont*)

Megoldás. A sávok szélessége legyen x. A rajzon látható darabolás segítségével felírjuk a kazettákon kívüli rész területét, ami az ajtólap területének felével egyenlő:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 90 \cdot x + 3 \cdot x \cdot (210 - 5 \cdot x) &= 9450, \\ 450x + 630x - 15x^2 &= 9450, \\ x^2 - 72x + 630 &= 0. \end{aligned}$$

Megoldóképlettel a gyökök:

$$x_{1;2} = \frac{72 \pm \sqrt{2664}}{2}, \quad \text{azaz} \quad x_1 \approx 10{,}2, \quad x_2 \approx 61{,}8.$$

Mivel az ajtó szélessége 90 cm, azért a sávok szélessége kisebb, mint 30 cm. Vagyis a kapott gyökök közül csak az x_1 felelhet meg.

Tehát az ajtón a kazetták körüli sávok kb. 10,2 cm szélesek.

3. *Oldjuk meg a következő egyenletet:*

$$\left(x-5-2\sqrt{x-2}\right)\left(x-10-4\sqrt{x-5}\right)=0. \qquad (13\ pont)$$

Megoldás. Az egyenlet értelmezési tartománya: $x \geq 5$.

Az egyenletet a következő alakra hozhatjuk:

$$\left(x-2-2\sqrt{x-2}-3\right)\left(x-5-4\sqrt{x-5}-5\right)=0,$$

$$\left[\left(\sqrt{x-2}\right)^2-2\sqrt{x-2}-3\right]\cdot\left[\left(\sqrt{x-5}\right)^2-4\sqrt{x-5}-5\right]=0.$$

Az első tényező $\sqrt{x-2}$-re, a második tényező pedig $\sqrt{x-5}$-re másodfokú. Ezeket a másodfokúnak tekinthető tényezőket tovább bonthatjuk, így kapjuk a következő alakot:

$$\left(\sqrt{x-2}-3\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)\left(\sqrt{x-5}-5\right)\left(\sqrt{x-5}+1\right)=0.$$

Egy szorzat akkor nulla, ha legalább egy tényezője nulla. A második és a negyedik tényező nem lehet 1-nél kisebb, vagyis ezek semmilyen x esetén sem lesznek nullák.

Marad két eset.

I. eset: $\sqrt{x-2}-3=0$. Ekkor $x=11$.

II. eset: $\sqrt{x-5}-5=0$. Ekkor $x=30$.

Mindkettő megoldás, mert benne van az értelmezési tartományban.

(Könnyen ellenőrizhető is a gyökök helyessége.)

4. *Adott az* $f\colon\ ]-3;5[\ \to \mathbb{R}$, $f(x)=\left|\left|(x-1)^2-1\right|-3\right|-5$ *függvény.*

a) Adjuk meg a függvény zérushelyeit.

b) Adjuk meg azon rácspontok koordinátáját, amelyek illeszkednek a függvény grafikonjára.

c) Mely intervallumokon szigorúan monoton csökkenő a függvény? (*14 pont*)

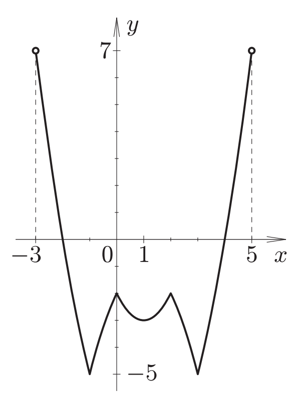
Megoldás. *a)* Az $\left|\left|(x-1)^2-1\right|-3\right|-5=0$ egyenlet megoldásait keressük. Az $\left|(x-1)^2-1\right|-3$ lehet -5 vagy 5, azaz:

$$\left|(x-1)^2-1\right|=-2 \quad \text{vagy} \quad \left|(x-1)^2-1\right|=8.$$

Természetesen az első egyenlet nem teljesülhet semmilyen valós x-re sem. Vagyis csak az $(x-1)^2=9$ adhat megoldást. (Az $(x-1)^2=-7$ sem teljesülhet.)

Innen pedig: $x_1=-2$, $x_2=4$.

b) A függvény értelmezési tartományában hét egész szám található. Ezek a -2, -1, 0, 1, 2, 3 és a 4. Vagyis hétnél több rácspont nem illeszkedhet a függvény grafikonjára. Kiszámítjuk ezeken a helyeken a függvényértékeket. Mivel mindegyik esetben egész számot kapunk, azért a feltételeknek megfelelő rácspontok a következők: $(-2;0)$, $(-1;-5)$, $(0;-2)$, $(1;-3)$, $(2;-2)$, $(3;-5)$ és $(4;0)$.



c) A normálparabola transzformálásával a függvény képe megrajzolható.

A $]-3;-1]$, $[0;1]$ és a $[2;3]$ intervallumokon a függvény szigorúan monoton csökkenő.

II. rész

5. *Az a, b és c pozitív számjegyekről a következőket tudjuk:* $a+b+c=\overline{ab}$ *és* $a^2+b^2+c^2=\overline{b^2a}$ *(ahol* $\overline{ab}$ *és* $\overline{b^2a}$ *is egy-egy kétjegyű szám). Adjuk meg ezeket a számjegyeket.* (*16 pont*)

Megoldás. A feladat szövegéből kiderül, hogy b olyan pozitív számjegy, amelynek a négyzete is számjegy. Vagyis összesen három eset van.

I. eset: Ha $b=3$, akkor az

$$\left.\begin{aligned} a+3+c&=10a+3\\ a^2+9+c^2&=90+a \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk, amit a következő alakban is írhatunk:

$$\left.\begin{aligned} c&=9a\\ a^2+c^2&=a+81 \end{aligned}\right\}.$$

Az a olyan pozitív számjegy, amelynek a kilencszerese is számjegy. Vagyis $a=1$, $c=9$.

Ez valóban megoldás, mert az egyenletrendszer második egyenletét is igazzá teszi.

II. eset: Ha $b=2$, akkor az

$$\left.\begin{aligned} a+2+c&=10a+2\\ a^2+4+c^2&=40+a \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk, amit a következő alakban is írhatunk:

$$\left.\begin{aligned} c&=9a\\ a^2+c^2&=a+36 \end{aligned}\right\}.$$

Most is csak az $a=1$, $c=9$ adódna az első egyenletből, de ez nem megoldása a második egyenletnek.

III. eset: Ha $b=1$, akkor az

$$\left.\begin{aligned} a+1+c&=10a+1\\ a^2+1+c^2&=10+a \end{aligned}\right\}$$

egyenletrendszert kell megoldanunk, amit így írhatunk:

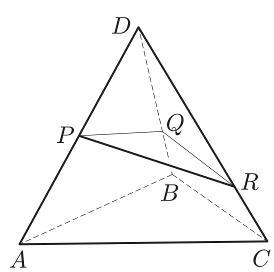
$$\left.\begin{aligned} c&=9a\\ a^2+c^2&=a+9 \end{aligned}\right\}.$$

Az előző esethez hasonlóan innen sem kapunk megfelelő számjegyeket.

A feladat egyedüli megoldása: $a=1$, $b=3$, $c=9$.

6. *Az $ABCD$ szabályos tetraédert egy síkkal elmetsszük. A metszősík három, egy csúcsból induló élt metsz a közös csúcstól számítva $1:1$, $2:1$ és $3:1$ arányban. Határozzuk meg a lemetszett tetraéder és az eredeti tetraéder felszínarányát.* (*16 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Tudjuk, hogy $DP:PA=1:1$, $DQ:QB=2:1$, $DR:RC=3:1$. Legyen a szabályos tetraéder élhossza a, ekkor $PD=\frac{a}{2}$, $QD=\frac{2a}{3}$, $RD=\frac{3a}{4}$.



Az $ABCD$ szabályos tetraéder felszíne:

$$A_{ABCD}=a^2\cdot\sqrt{3}.$$

A lemetszett tetraéder oldallapjainak egyik szöge 60 fokos, ezt felhasználva felírható mindhárom háromszögnek a területe:

$$t_{PQD}=\frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\sin 60^\circ}{2}=\frac{\frac{a^2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{12}\approx 0{,}144\cdot a^2,$$

$$t_{QRD}=\frac{\frac{2a}{3}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\sin 60^\circ}{2}=\frac{\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{8}\approx 0{,}217\cdot a^2,$$

$$t_{RPD}=\frac{\frac{3a}{4}\cdot\frac{a}{2}\cdot\sin 60^\circ}{2}=\frac{\frac{3a^2}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\frac{3a^2\cdot\sqrt{3}}{32}\approx 0{,}162\cdot a^2.$$

A lemetszett tetraéder alsó lapjának minden oldalhossza koszinusztétellel meghatározható:

$$PQ^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{2a}{3}\right)^2-2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2a}{3}\cdot\cos 60^\circ=\frac{a^2}{4}+\frac{4a^2}{9}-\frac{a^2}{3}=$$
$$=\frac{9a^2+16a^2-12a^2}{36}=\frac{13a^2}{36},\qquad PQ=\frac{a\sqrt{13}}{6}\approx 0{,}601\cdot a,$$
$$QR^2=\left(\frac{2a}{3}\right)^2+\left(\frac{3a}{4}\right)^2-2\cdot\frac{2a}{3}\cdot\frac{3a}{4}\cdot\cos 60^\circ=\frac{4a^2}{9}+\frac{9a^2}{16}-\frac{a^2}{2}=$$
$$=\frac{64a^2+81a^2-72a^2}{144}=\frac{73a^2}{144},\qquad QR=\frac{a\sqrt{73}}{12}\approx 0{,}712\cdot a,$$
$$RP^2=\left(\frac{3a}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2\cdot\frac{3a}{4}\cdot\frac{a}{2}\cdot\cos 60^\circ=\frac{9a^2}{16}+\frac{a^2}{4}-\frac{3a^2}{8}=$$
$$=\frac{9a^2+4a^2-6a^2}{16}=\frac{7a^2}{16},\qquad RP=\frac{a\sqrt{7}}{4}\approx 0{,}661\cdot a.$$

A PQR háromszög területét az oldalak ismeretében a Heron-képlettel számolhatjuk ki. Ehhez szükségünk van a háromszög kerületének felére:

$$s=\frac{0{,}601a+0{,}712a+0{,}661a}{2}=0{,}987a.$$
$$t_{PQR}=\sqrt{s(s-PQ)(s-QR)(s-RP)}=\sqrt{0{,}987a\cdot 0{,}386a\cdot 0{,}275a\cdot 0{,}326a}\approx 0{,}185\cdot a^2.$$

A lemetszett tetraéder felszínét a négy háromszög területösszege adja:

$$A_{PQRD}=0{,}144a^2+0{,}217a^2+0{,}162a^2+0{,}185a^2=0{,}708a^2.$$

A felszínek keresett aránya a következő:

$$\frac{A_{PQRD}}{A_{ABCD}}=\frac{0{,}708\cdot a^2}{\sqrt{3}\cdot a^2}\approx 0{,}41.$$

7. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a*

$$\sin^4 x+\sin^4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sin^4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

egyenletet. (*16 pont*)

Megoldás. Mindkét oldalt szorozzuk meg 4-gyel, és írjuk a következő alakban az egyenletet:

$$\left(2\sin^2 x\right)^2+\left[2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right]^2+\left[2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right]^2=6.$$

Tudjuk, hogy:

$$2\sin^2 x=\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)-\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=1-\cos 2x.$$

Ezt felhasználva:

$$2\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=1+\sin 2x,$$

illetve:

$$2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=1-\sin 2x.$$

Ezeket a helyettesítéseket alkalmazzuk az eredeti egyenletünkben:

$$(1-\cos 2x)^2+(1+\sin 2x)^2+(1-\sin 2x)^2=$$
$$=1-2\cos 2x+\cos^2 2x+1+2\sin 2x+\sin^2 2x+1-2\sin 2x+\sin^2 2x=$$
$$=\sin^2 2x-2\cos 2x+4=6.$$

Tovább alakítva másodfokú egyenletet kapunk:

$$1-\cos^2 2x-2\cos 2x+4=6,$$
$$\cos^2 2x+2\cos 2x+1=0,$$
$$(\cos 2x+1)^2=0.$$

Azaz $\cos 2x=-1$, amiből a $2x=\pi+2k\pi$ (ahol $k\in\mathbb{Z}$) adódik.

Az egyenlet megoldásai: $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ (ahol $k\in\mathbb{Z}$).

8. *Tekintsük az $y=(p-1)x^2+2x-(p+1)$ egyenletű parabolákat, ahol p valós paraméter és $p \neq 1$.*

a) Melyek ezek közül azok a parabolák, amelyek az x tengelyt két, egész koordinátájú pontban metszik, vagy egy egész koordinátájú pontban érintik?

b) Írjuk fel $p=2$ paraméter esetén a parabola 4 abszcisszájú pontján átmenő érintő egyenletét.

c) Határozzuk meg a $p=3$ paraméter esetén az $[1;3]$ intervallumon a parabola alatti terület nagyságát. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Meg kell határoznunk az $(p-1)x^2+2x-(p+1)=0$ paraméteres, másodfokú egyenlet zérushelyeit:

$$x_{1;2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4(p-1)(p+1)}}{2(p-1)}=\frac{-2\pm 2p}{2(p-1)}=\frac{-1\pm p}{p-1}.$$

Vagyis a zérushelyek: $x_1=1$, $x_2=\dfrac{-p-1}{p-1}$. (Természetesen $p=0$ esetén $x_1=x_2$.)

Csak azt kell megvizsgálnunk, hogy az x_2 milyen paraméterek esetén lesz egész, hiszen az x_1 mindig egész. Végezzük el a következő átalakításokat:

$$x_2=\frac{-p-1}{p-1}=\frac{-(p-1)-2}{p-1}=-1-\frac{2}{p-1}.$$

A $p-1$ a 2 osztója kell, hogy legyen, vagyis a lehetséges értékei: -2, -1, 1, 2. Ezek alapján p-re négy megfelelő számot kapunk: -1, 0, 2, 3. A feladat feltételeinek eleget tevő parabolák:

$$y=-2x^2+2x,\quad y=-x^2+2x-1,\quad y=x^2+2x-3,\quad y=2x^2+2x-4.$$

b) A $p=2$ paraméter esetén a parabola egyenlete a következő lesz:

$$y=x^2+2x-3.$$

Tudjuk, hogy az érintő meredekségét minden helyen a derivált adja:

$$\left(x^2+2x-3\right)'=2x+2.$$

Vagyis a 4 abszcisszájú pontban $2\cdot 4+2$, azaz 10 lesz az érintő meredeksége. A 4-es abszcisszához $4^2+2\cdot 4-3=21$-es ordináta tartozik. Vagyis a $(4;21)$ koordinátájú ponton áthaladó 10-es meredekségű egyenes lesz a keresett érintő:

$$\begin{aligned} y-21&=10\cdot(x-4),\\ y&=10x-19. \end{aligned}$$

c) A $p=3$ paraméter esetén a parabola egyenlete a következő lesz:

$$y=2x^2+2x-4.$$

A görbe alatti területet a következő határozott integrál adja:

$$\int_1^3\left(2x^2+2x-4\right)dx=\left[2\cdot\frac{x^3}{3}+2\cdot\frac{x^2}{2}-4x\right]_1^3=18+9-12-\frac{2}{3}-1+4=\frac{52}{3}.$$

Vagyis a $p=3$ paraméter esetén az $[1;3]$ intervallumon a parabola alatti terület $\dfrac{52}{3}$.

9. *Három különböző egyenes körkúpról tudjuk, hogy az alapköreik sugara és a kúpok alkotói rendre egy-egy azonos differenciájú számtani sorozat három egymást követő elemét adják. Mutassuk meg, hogy a kúpok felszíne nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő eleme.* (*16 pont*)

Megoldás. Az alapkörök sugarai legyenek: $r-d$, r, $r+d$, az alkotók pedig: $a-d$, a, $a+d$. Ekkor a három kúp felszíne:

$$A_1=\pi(r-d)(a-d+r-d),\quad A_2=\pi r(a+r),\quad A_3=\pi(r+d)(a+d+r+d).$$

Ha A_1, A_2, A_3 egy számtani sorozat három egymást követő eleme lenne, akkor az $A_3-A_2=A_2-A_1$ egyenlőségnek kellene teljesülnie. Számoljuk ki ezeket a különbségeket:

$$\begin{aligned} A_3-A_2&=\pi(r+d)(a+r+2d)-\pi r(a+r)=\\ &=\pi\left(ar+ad+r^2+rd+2rd+2d^2-ar-r^2\right)=\pi\left(ad+3rd+2d^2\right),\\ A_2-A_1&=\pi r(a+r)-\pi(r-d)(a+r-2d)=\\ &=\pi\left(ar+r^2-ar+ad-r^2+rd+2rd-2d^2\right)=\pi\left(ad+3rd-2d^2\right). \end{aligned}$$

Látható, hogy a két különbség csak $d=0$ esetén lehetne egyenlő, de a kúpok különbözőek, ezért $d\neq 0$.

Vagyis a kúpok felszíne nem lehet egy számtani sorozat három egymást követő eleme.