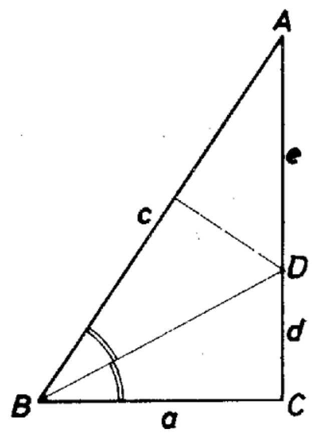
Legyen a BCD háromszög C-nél levő szöge $90°$-os, és a B-nél, D-nél levő szögek közül a B-nél levő legyen a kisebb. A BC egyenes BD-re vonatkozó tükörképe messe CD-t A-ban, és az AB, BC, CA, CD, DA szakaszok hosszát jelöljük rendre c-vel, a-val, b-vel, d-vel, e-vel. Mivel az ABC háromszögben BD szögfelező, $a{:}c = d{:}e$, továbbá Pitagorasz tétele szerint

$$c^2 = a^2 + (d+e)^2.$$

Írjunk itt e helyére cd/a-t, és fejezzük ki a kapott összefüggésből c-t, majd b-t:

$$c = \frac{a^2+d^2}{a^2-d^2}a, \quad b = \frac{2a^2d}{a^2-d^2}$$

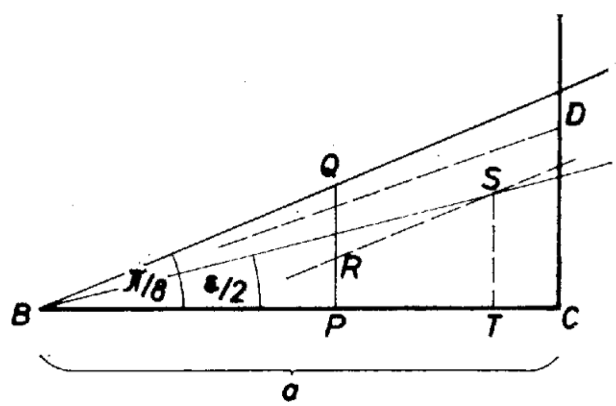
(a c-re adódó másodfokú egyenlet másik gyöke negatív).



Ha most a kapott ABC háromszög oldalait $(a^2-d^2)/a$-szorosukra nyújtjuk, az új $A'B'C'$ háromszög oldalainak a hossza rendre

$$(1) \qquad a' = a^2 - d^2, \quad b' = 2ad, \quad c' = a^2 + d^2$$

lesz. Ennek alapján elegendő olyan BCD háromszöget találnunk, melyben a és d egészek, továbbá a CBD szög nagyobb $\varepsilon/2$-nél.



Mérjük fel egy tetszőleges BP félegyenesre az $\varepsilon/2$, $\pi/8$ szögeket, és messe az utóbbi szárát a BP-re P-ben emelt merőleges Q-ban. Mérjük fel a Q-ból P felé induló félegyenesre az egységnyi hosszú QR szakaszt, és húzzunk párhuzamost R-en át BQ-val. Ez valahol metszi az $\varepsilon/2$ szög szárát, jelöljük ezt a pontot S-sel, S-nek BP-n levő vetületét T-vel. Legyen C a BP félegyenes tetszőleges, T-n túli pontja, melyre $a = BC$ egész szám. A C-ben BP-re emelt merőlegesnek az $\varepsilon/2$, $\pi/8$ szögek szárai közti darabja hosszabb az egységül választott QR szakasznál, így biztosan van benne olyan D pont, amelyre CD egész. (Ha a BP-re C-ben emelt merőlegesre egymás után egységnyi hosszúságú szakaszokat mérünk fel, ezek végpontjainak a sorozata nem ugorhatja át ezt a szakaszt.) Készen vagyunk, megvan az a BCD háromszög, amit kerestünk, a feladat állítását ezzel beláttuk.

Megjegyzések. 1. Akik csak képletekben hajlandók gondolkodni, most azt mondják: igen, tudni kellett a pitagoraszi számhármasokat. Valóban (1) ezek jól ismert képlete. Ne tévesszük azonban szem elől, hogy

– a pitagoraszi számhármasok előállításának a nem-triviális fele az, hogy minden derékszögű háromszöghöz van olyan a és d egész, hogy (1) előállítja a háromszög a', b', c' oldalait, ha a', b', c' egészek [az, hogy (1) derékszögű háromszöget ad meg, nyilvánvaló];

– nekünk ehelyett arra volt szükségünk, hogy uralni tudjuk a kapott háromszög szögeit a, d alkalmas megválasztásával, ami a pitagoraszi hármasok levezetésénél nem szokott szerepelni.

2. Belátható a feladat állítása annak alapján is, hogy megmutatjuk, tetszőleges n természetes számhoz található olyan nála nagyobb a természetes szám, hogy az a, $(a+1)$ befogókkal rajzolt derékszögű háromszög átfogójának a hossza egész szám. Más szóval azt mutatjuk meg, hogy a

$$2c^2-(2a+1)^2=1 \tag{2}$$

egyenlet egész gyökpárjai között tetszőlegesen nagy található. Ilyen egyenletekről sokszor volt már szó lapunkban (általános megoldásukról *Fried Ervin* írt cikksorozatot), így az is többször szerepelt már, hogyan lehet (2) egyetlen gyökpárjából végtelen sokat előállitani.