

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Hány olyan különböző téglalast van, amelyre teljesül, hogy élének hossza egész szám, térfogata 15 000 egység és a három él hosszának legnagyobb közös osztója 5? (12 pont)

2. Oldjuk meg az következő egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\sqrt{x - \sqrt{x + 2}} = 2$;

b) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \log_{16} x^3$. (13 pont)

3. Családunk szokásait megfigyelve annak a valószínűsége, hogy egy nyári délután sétálni megyünk 0,6. Ha otthon maradunk, akkor 0,25 annak a valószínűsége, hogy fagyizunk. Annak a valószínűsége, hogy fagyizunk 0,2. Mennyi egy nyári délután annak a valószínűsége, hogy

a) otthon maradunk és fagyizunk;

b) sétálunk és fagyizunk;

c) fagyizunk, ha sétálni megyünk? (13 pont)

4. Adott az $f: x \mapsto x^3$ függvény.

a) Adjuk meg az f függvénygörbe azon érintőinek egyenletét, amelyek meredeksége 12.

b) Számítsuk ki az érintési pontok egymástól való távolságát.

c) Állapítsuk meg, hogy milyen távol vannak egymástól az érintők. (13 pont)

II. rész

5. Egy golyót beletettünk egy olyan edénybe, amelynek a belső része csonkakúp alakú, és 3 cm magasságig volt vízzel töltve. Miután a golyót behelyeztük, a víz éppen nem folyt ki az edényből. A csonkakúp alapkörének és fedőkörének sugara rendre 2, illetve 5 cm, magassága pedig 4 cm. Mekkora a golyó sugara, ha magasságának $\frac{2}{3}$ részéig merül bele a vízbe? (16 pont)

6. Az Újpesti Fa- és Fémipari Szakiskola új épületében 1927-ben kezdődött meg a tanítás. Az iskola egy ötszögű telekre épült, melyről a helytörténeti újság a következőket írja: „A Görgey út és a Szent Imre utca $49,4^\circ$ -os szöget zár be egymással, egyenes vonalú 229 m-es és 195 m-es telekmérettel. A Corvin utcai telekhatár $44,1^\circ$ -os szögben törlik a Görgey út felé 104 m hosszon, majd homorú szögben 49 m-en északi irányt vesz és innen egy rövid szakaszon zárul a Szent Imre utcai telekhatár végpontjához.” Tudjuk még, hogy a Görgey út $+2,9^\circ$ -os szöget zár be a K–Ny-i iránnyal és a telek délnyugati sarokpontja a Görgey út és a Corvin utca kereszteződése. Számítsuk ki a telek területét. (16 pont)

7. Tekintsünk egy 6 pontú teljes gráfot.

a) Hány 3, 4, 5, illetve 6 csúcsot tartalmazó kör van ebben a gráfban?

b) Hány 3, 4, 5, illetve 6 csúcsot tartalmazó kör lesz benne, ha egy élet elhagyunk? (16 pont)

8. Egy szabályos, két egység oldalú n -szög ($n \geq 3$) mindegyik csúcsa, mint középpont köré egység sugarú kört írunk.

a) Adjuk meg n függvényében annak a körnek az r_n sugarát, amely a sokszög csúcsába írt körök mindegyikét érinti a sokszög belsejében.

b) Milyen n értékekre lesz r_n értéke 2013-nál nagyobb? (16 pont)

9. Egy bergengóc egyetemi hallgató tanulmányai 3 évében diákhitelt vett föl. Az első tanév szeptemberétől minden hónap első napján 25 000 Ft-ot kapott. A kamatszámítás havonta történik időarányos (lineáris) kamatszámítás szerint, vagyis a bank a havi kamat összegét a $\frac{t \cdot k}{12}$ képlet alapján számítja ki, ahol t a tőketartozás, és k az aktuális éves kamatláb. A tárgyévben meg nem fizetett kamat tőkésítésére évente, december 31-i értéknapal kerül sor. Tegyük föl, hogy a hitel felvétele és visszafizetése alatt a kamatláb végig 9%.

a) Mekkora a végzett diák tőketartozása a tanulmányok befejezését követő hónap (július) első napján?

b) A diák a tanulmányok befejezését követő szeptember első napjától a tartozás teljes kiegyenlítéséig minden hónapban 25 000 Ft-tal (illetve az utolsó hónapban a fennmaradó összeggel) törleszti felvett hitelét. A havonta törlesztett összeg először csak a felgyűlt kamatokat csökkenti, majd azok elfogyása után minden hónapban a tőketartozást is. Hány hónapig tart így a teljes hitel visszafizetése? (16 pont)