Megoldásvázlatok a 2012/9. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Számadó László

I. rész

1. *Értelmezzünk az* $\mathbb{R}\setminus\{3;4\}$ *halmazon az* $f(x)=\dfrac{x-671}{x-4}-\dfrac{x-503}{x-3}$ *hozzárendeléssel egy függvényt.*

a) Határozzuk meg az f függvény zérushelyeit.

b) Benne van-e az f értékkészletében a -417*? Ha igen, akkor adjuk meg az értelmezési tartomány megfelelő elemeit.* (*11 pont*)

Megoldás. *a*) Keressük azokat az x értékeket, amelyre $f(x)=0$, azaz oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{x-671}{x-4}-\frac{x-503}{x-3}=0.$$

A bal oldalon a törteket írjuk közös nevezővel:

$$\frac{(x-671)(x-3)-(x-503)(x-4)}{(x-4)(x-3)}=0.$$

A tört értéke akkor nulla, ha a számlálója nulla, vagyis:

$$(x-671)(x-3)-(x-503)(x-4)=0,$$
$$\left(x^2-674x+2013\right)-\left(x^2-507x+2012\right)=0,$$
$$-167x+1=0,$$
$$x=\frac{1}{167}.$$

Az f függvénynek az $\dfrac{1}{167}$ az egyedüli zérushelye.

b) Most azokat az x értékeket keressük, amelyre $f(x)=-417$, azaz oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\frac{x-671}{x-4}-\frac{x-503}{x-3}=-417.$$

A bal oldalon a törteket most is közös nevezővel írjuk, majd rendezzük az egyenletet:

$$\frac{(x-671)(x-3)-(x-503)(x-4)}{(x-4)(x-3)}=\frac{-167x+1}{(x-4)(x-3)}=-417,$$
$$-167\,x+1=-417(x-4)(x-3),$$
$$417\,x^2-3086\,x+5005=0,$$
$$x_{1;2}=\frac{3086\pm\sqrt{3086^2-4\cdot417\cdot5005}}{2\cdot417}=\frac{3086\pm1084}{834}.$$

Vagyis $x_1=5$, $x_2=\dfrac{1001}{417}$.

Tehát -417 benne van az f értékkészletében, és f értelmezési tartományának két megfelelő eleme van, hiszen $f(5)=-417$ és $f\left(\dfrac{1001}{417}\right)=-417$.

2. *Egy folyóirat éves előfizetési díja* 1750 Ft *volt. A következő évre ezt megemelték* 1800 Ft*-ra.*

a) Hány százalékos emelésről beszélhetünk?

Az igazsághoz az is hozzátartozik, hogy amikor olcsóbb volt a folyóirat, akkor öt jelent meg évente, 32, 32, 32, 32 *és* 28 *oldalas terjedelemben. Amikor drágább lett, akkor évente csak négyet adtak ki,* 36, 48, 40 *és* 44 *oldalas terjedelemben.*

b) Az előfizetők számára valójában milyen változást jelentett ez egy oldalra vonatkoztatva?

c) Mennyivel változott átlagosan egy folyóirat oldalszáma a vizsgált két évet összehasonlítva?

d) Adjuk meg mind a két évhez a megjelent folyóiratok oldalszámának szórását.

(*13 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel $\frac{1800}{1750} \approx 1{,}029$, azért az előfizetési díj emelése kb. 3%-osnak mondható.

b) Az előfizetési díj emelése előtt $32+32+32+32+28 = 156$ oldalt kaptak az előfizetők, utána pedig $36+48+40+44 = 168$ oldalt.

Az előfizetési díj emelése előtt egy oldal ára átlagosan $\frac{1750}{156} \approx 11{,}22$ Ft volt. Az emelés után egy oldal ára átlagosan $\frac{1800}{168} \approx 10{,}71$ Ft lett. Vagyis egy oldalra vonatkoztatva árcsökkenésről beszélhetünk.

Mivel $\frac{10{,}71}{11{,}22} \approx 0{,}955$, így ez kb. 4,5%-os árcsökkentést jelent.

c) Az előfizetési díj emelése előtt egy újság átlagosan $\frac{156}{5} = 31{,}2$ oldalas volt. Az emelés után pedig $\frac{168}{4} = 42$ oldalas lett.

Vagyis egy folyóirat átlagosan 10,8 oldallal (azaz kb. 11 oldallal) lett több.

d) Használjuk a szórásra vonatkozó képletet:

$$D(x) = \sqrt{\frac{(x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \ldots + (x_n - x)^2}{n}},$$

ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a számsokaság, x pedig a számsokaság számtani közepe.

Kezdetben a számtani közép 31,2 volt, ekkor a szórás:

$$D_1(31{,}2) = \sqrt{\frac{(32-31{,}2)^2 + (32-31{,}2)^2 + (32-31{,}2)^2 + (32-31{,}2)^2 + (28-31{,}2)^2}{5}} = \\ = 1{,}6.$$

Aztán a számtani közép 42 lett, ekkor a szórás:

$$D_2(42) = \sqrt{\frac{(36-42)^2 + (48-42)^2 + (40-42)^2 + (44-42)^2}{4}} \approx 4{,}47.$$

3. *Adott három pont a koordinátarendszerben:*

$$A(980; -1), \quad B(981; 1), \quad C\big(2^{1986}; 2 \cdot 2^{1986}\big).$$

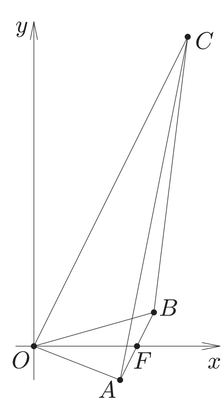
Az AB felezőpontjára tükrözve a C pontot kapjuk a D-t. Határozzuk meg az A, B, C és D pontok által meghatározott négyszög területét. (*13 pont*)

Megoldás. Az AB felezőpontja: $F(980{,}5; 0)$. A középpontos tükrözés miatt a négyszög területe az ABC háromszög területének kétszeresével lesz egyenlő. Mivel a C pont második koordinátája kétszerese az elsőnek, azért az OC egyenes (O az origó) meredeksége 2. Az adott koordináták alapján az AB egyenes meredeksége is 2.

Ezek alapján AB és OC párhuzamos egyenesek, ezért az OC egyenes tetszőleges pontja az A és B ponttal olyan háromszöget alkot, amelynek a területe egyenlő az ABC háromszög területével (hiszen ezeknek a háromszögeknek az AB oldalhoz tartozó magasságuk azonos hosszúságú). Ezen háromszögek közül határozzuk meg az ABO területét. Mivel ennek a háromszögnek OF a súlyvonala, így az FBO háromszög területének dupláját kell vennünk. Mivel $OF = 980{,}5$, az ehhez az oldalhoz tartozó magasság hossza pedig 1, azért:

$$t_{FBO} = \frac{980{,}5 \cdot 1}{2}, \quad t_{ABC} = t_{ABO} = 2 \cdot t_{FBO} = 980{,}5.$$

A kérdéses négyszög területe: $T = 2 \cdot t_{ABC} = 1961$.



Megjegyzés. Természetesen a megadott koordináták segítségével a hagyományos számolással is megkapható a terület. Például az AB egyenes és a C pont távolsága meghatározható. Ez lesz az AB oldalhoz tartozó magasság.

4. *Egy forgáskúp palástja olyan negyedkör, melynek sugara* 10 cm.

a) Mekkora a kúp felszíne, térfogata?

b) A kúpot a magasság felénél, az alaplappal párhuzamos síkkal két részre vágjuk. Hogyan aránylik a két rész térfogata egymáshoz? *(14 pont)*

Megoldás. *a*) A 10 cm sugarú negyedkörív i hossza lesz a kúp alapkörének kerülete:

$$i = \frac{2 \cdot 10 \cdot \pi}{4} = 5\pi.$$

Az alapkör sugara legyen r, ekkor $5\pi = 2r\pi$, azaz $r = 2,5$ cm. A negyedkör sugara egyben a forgáskúp a alkotója is lesz. Tudjuk, hogy $a^2 = r^2 + m^2$, ahol m a kúp magasságával egyenlő. A rendelkezésünkre álló adatok alapján:

$$m = \sqrt{a^2 - r^2} = \sqrt{10^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{93{,}75}.$$

Most már minden adatot ismerünk, hogy a felszínt és a térfogatot meghatározzuk:

$$A = r^2\pi + r\pi a = 2{,}5^2 \cdot \pi + 2{,}5 \cdot \pi \cdot 10 \approx 98{,}2 \ \left(\text{cm}^2\right),$$
$$V = \frac{r^2\pi m}{3} = \frac{2{,}5^2 \cdot \pi \cdot \sqrt{93{,}75}}{3} \approx 63{,}4 \ \left(\text{cm}^3\right).$$

b) A levágott kis kúp nyilván hasonló lesz az eredetihez. A hasonlóság aránya: $\frac{1}{2}$. Tudjuk, hogy a térfogatuk aránya: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$. Azaz a fenti kis kúp az egésznek az $\frac{1}{8}$ része, a lenti csonkakúp az egésznek a $\frac{7}{8}$ része lesz. Vagyis $1 : 7$ a két rész aránya.

II. rész

5. *a) Igazoljuk, hogy az*

$$a = \sqrt[3]{15 + 4\sqrt{14}} + \sqrt[3]{15 - 4\sqrt{14}}$$

gyöke az $x^3 - 3x - 30 = 0$ *egyenletnek.*

b) Igazoljuk, hogy az $x^3 - 3x - 18 = 0$ *egyenletnek a*

$$b = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$$

az egyedüli gyöke. *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Vegyük a megadott a harmadik hatványát:

$$a^3 = 15 + 4\sqrt{14} + 15 - 4\sqrt{14} + 3\sqrt[3]{15 + 4\sqrt{14}}\,\sqrt[3]{15 - 4\sqrt{14}}\left(\sqrt[3]{15 + 4\sqrt{14}} + \sqrt[3]{15 - 4\sqrt{14}}\right).$$

Mivel a zárójeles kifejezés a-val egyenlő, továbbá tudjuk, hogy

$$\sqrt[3]{15 + 4\sqrt{14}}\,\sqrt[3]{15 - 4\sqrt{14}} = \sqrt[3]{\left(15 + 4\sqrt{14}\right)\left(15 - 4\sqrt{14}\right)} = \sqrt[3]{225 - 16 \cdot 14} = 1,$$

azért a fenti sor így írható:

$$a^3 = 30 + 3a, \qquad a^3 - 3a - 30 = 0.$$

Ez pontosan azt mutatja, hogy az $x^3 - 3x - 30 = 0$ egyenletnek gyöke az

$$a = \sqrt[3]{15 + 4\sqrt{14}} + \sqrt[3]{15 - 4\sqrt{14}}.$$

b) Számológéppel megsejthető, hogy $b = 3$ (és ez valóban gyöke az $x^3 - 3x - 18 = 0$ egyenletnek). Igazoljuk ezt a sejtést. Vegyük a megadott b harmadik hatványát:

$$b^3 = 9 + 4\sqrt{5} + 9 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}\right).$$

Mivel a zárójeles kifejezés b-vel egyenlő, továbbá tudjuk, hogy

$$\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}\,\sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\left(9 + 4\sqrt{5}\right)\left(9 - 4\sqrt{5}\right)} = \sqrt[3]{81 - 16 \cdot 5} = 1,$$

azért a fenti sor így írható:

$$b^3 = 18 + 3b, \qquad b^3 - 3b - 18 = 0.$$

Ez azt jelenti, hogy az $x^3-3x-18=0$ egyenletnek gyöke a

$$b=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}.$$

A harmadfokú egyenlet bal oldalát sejtésünk szerint olyan szorzattá lehet alakítani, amelynek egyik tényezője $x-3$. A megfelelő másodfokú tényező gyorsan megtalálható: $(x-3)\big(x^2+3x+6\big)=0$. A második tényezőnek nincs valós zérushelye, mert a diszkriminánsa negatív. Ezek szerint az eredeti egyenletnek a b az egyedüli gyöke (és az valóban 3-mal egyenlő).

Megjegyzés. Megoldhatjuk a feladatot teljes köb $\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 \text{ és } \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)$ használatával is.

6. *Ibolya történelemóráń a közvetett elnökválasztást egy elképzelt ország adatain keresztül mutatta meg tanítványainak:*

Bergengóciát nyolc álam alkotja, ezért hivatalosan a neve United States of Bergengócia (röviden USB). Bergengóciában a választópolgárok két párt közül választhatnak, majd a pártok meghatározott számú elektorjai választják meg az elnököt a két párt egy-egy jelöltje közül. Minden államban az utolsó népszámlálás adatai alapján határozzák meg az elektorok számát. A most érvényben lévő adatokat a következő táblázat mutatja:

Állam neve	Választók száma	Elektorok száma
Aliforn	283 821	10
Lorida	234 171	9
Rizon	179 351	7
Olorad	38 021	3
Labama	28 221	3
Regon	26 991	3
Ebrasz	5 261	2
Laszka	4 171	2

Bergengócia lakói nagyon öntudatosak, így mindenki él a választójogával. Mindenki arra a pártra szavaz, amelynek az elektorjaitól a megfelelő elnököt reméli. Az a párt nyer, amelyik a legtöbb szavazatot kapja. Minden államban a megválasztott párt adja az összes elektort, és az elektorok ezek után szabadon választhatnak a két jelölt között (nem köti őket pártfegyelem). Minden államban az az elnökjelölt lesz a támogatott, aki az elektorok többségének szavazatát bírja, és ekkor az állam összes elektori támogatása erre a jelöltre száll. A legtöbb elektor által támogatott jelölt nyeri a választást.

a) Hány választó él átlagosan USB egy-egy államában?

b) Melyik államban kell a legtöbb, illetve a legkevesebb szavazat egy elektor megválasztásához?

c) Az egyik elnökjelölt nyilatkozata szerint biztosan ő lesz a nyertes, mert három állam támogatását is biztosra veszi. Melyik három államra gondolhatott?

d) Nyerhet-e valaki ezen a választáson, ha a választópolgároknak kevesebb, mint a 20%-a szerette volna, hogy ő legyen az elnök? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Adjuk össze a választók számát és vegyük a nyolcadát:

$$\frac{283\,821+234\,171+179\,351+38\,021+28\,221+26\,991+5261+4171}{8}=$$
$$=\frac{800\,008}{8}=100\,001.$$

Vagyis átlagosan 100 001 választó él USB egy-egy államában.

b) Vizsgáljuk a kérdést államonként. Minden államban a választók száma felének egészrésze és még 1 fő kell egy párt győzelméhez. Ekkor az összes elektort ez a párt adja. Vegyük a választók száma felének egészrészét, adjunk hozzá egy főt, és ezt osszuk az elektorok számával. Az így kapott hányadost mutatja a következő táblázat:

Aliforn	14 191,1
Lorida	13 009,6
Rizon	12 810,9
Olorad	6337
Labama	4703,7
Regon	4498,7
Ebrasz	1315,5
Laszka	1043.

Vagyis Aliforn államban kell a legtöbb, és Laszka államban a legkevesebb szavazat egy elektor megválasztásához.

c) Az elektorok száma: $10 + 9 + 7 + 3 + 3 + 3 + 2 + 2 = 39$. Minimum 20 elektor támogatására van szüksége egy jelöltnek a nyeréshez.

Ha Aliforn és Lorida őt támogatja (19 elektor), akkor a harmadik állam tetszőleges lehet (mivel mindegyikben 1-nél több az elektor).

Ha Aliforn és Rizon őt támogatja (17 elektor), de Lorida nem, akkor a harmadik államnak minimum 3 elektorral kell rendelkeznie, azaz csak Olorad, Labama vagy Regon lehet a harmadik.

Látható, hogy további lehetőség nincs.

Vagyis a következő hármasokra gondolhatott az elnökjelölt:

Aliforn, Lorida, Rizon;
Aliforn, Lorida, Olorad;
Aliforn, Lorida, Labama;
Aliforn, Lorida, Regon;
Aliforn, Lorida, Ebrasz;
Aliforn, Lorida, Laszka;
Aliforn, Rizon, Olorad;
Aliforn, Rizon, Labama;
Aliforn, Rizon, Regon.

d) Ha az elnökjelölt Rizon, Olorad, Labama, Regon, Ebrasz és Laszka államokban megszerzi a támogatást, akkor 20 elektorral rendelkezik. Ezekben az államokban a szavazatok többségével rendelkeznie kell, tehát mindenütt minimum a választói létszám felének egészrészénél eggyel többen az ő pártjára szavaztak. A minimális értékeket összeadva ez

$$89\,676 + 19\,011 + 14\,111 + 13\,496 + 2631 + 2086 = 141\,011$$

szavazatot jelent. Ha a többi államban senki nem szeretné, hogy ő legyen a nyertes, már akkor is a 20 elektorral megnyerheti a választásokat. Azaz a 800 008 választóból 141 011 fő elegendő lehet a nyeréshez. Mivel $\dfrac{141\,011}{800\,008} \approx 0{,}176$, azért ez csak 17,6%-os támogatottságot jelent.

Vagyis nyerhet valaki ezen a választáson úgy is, hogy a választópolgároknak kevesebb, mint a 20%-a szerette volna, hogy ő legyen az elnök.

Megjegyzés. Meglepő, hogy ha USB lakói nem lennének ennyire öntudatosak, akkor az is elképzelhető lenne, hogy ezekben az államokban csak a szavazók fele élt a választójogával. Az aktív választók fele elegendő a 20 elektor megszerzéséhez, ami kb. 70 500 főt jelent. Ez alig 9%-os támogatottságnak felelne meg, és a jelölt már ekkor is megnyerheti a választást.

7. *Egy kabát ára* 20 000 Ft *volt eredetileg, de az áruház elkezdte kedvezményesen árusítani. Rövid időn belül egy újabb akció keretében* 14 960 Ft *lett az ára. Mind a két esetben az árengedmény százalékban kifejezve* 10 *és* 20 *közötti egész szám volt. László az első árengedmény után vásárolt egy kabátot. Mennyit fizethetett ekkor?* (*16 pont*)

Megoldás. Legyen ez első árengedmény p%, a második pedig q%. Tudjuk, hogy $10 < p < 20$, $10 < q < 20$, és mindkettő egész szám. A szöveg alapján a következő egyenlet írható fel:

$$20\,000\left(1-\frac{p}{100}\right)\left(1-\frac{q}{100}\right) = 14\,960.$$

Az egyenletet átalakítjuk: $(100-p)(100-q) = 7480$. A p és a q lehetséges értékei miatt a 7480-at két 80 és 90 közötti egész szám szorzatára kell bontanunk.

A prímtényezős felbontás segít a megfelelő szorzótényezők megtalálásában:

$$7480 = 2^3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17.$$

Mivel $11 \cdot 17$ már háromjegyű, azért ezek a prímtényezők nem szerepelhetnek egy helyen. Könnyen végiggondolható, hogy ha a 17 mellé csak 2-es tényezőket írnánk az nem lenne megfelelő:

$$2 \cdot 17 < 80, \qquad 2^2 \cdot 17 < 80, \qquad 2^3 \cdot 17 > 90.$$

Ha 5-ös és 2-es is szerepelne egyszerre a 17 mellett, akkor is nagy lenne ez a tényező, hiszen $2 \cdot 5 \cdot 17 > 90$.

Vagyis az egyedüli lehetőség, hogy az egyik tényező, például a $100 - p = 5 \cdot 17 = 85$. Ekkor a másik tényező is megfelelő lesz: $100 - q = 2^3 \cdot 11 = 88$. Természetesen a két tényező értéke felcserélhető. Vagyis az egyik árengedmény 15%-os, a másik 12%-os volt.

Nem tudjuk, hogy a kedvezményeknek mi volt a sorrendje, ezért az első kedvezményes ár lehetett a 20 000 Ft 85%-a, azaz 17 000 Ft, vagy lehetett a 20 000 Ft 88%-a, azaz 17 600 Ft. Ezek alapján László vagy 17 000 Ft-ért, vagy 17 600 Ft-ért vásárolta a kabátot. (Ellenőrizhető, hogy a 17 000 Ft 88%-a, és a 17 600 Ft 85%-a is 14 960 Ft.)

8. *a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy mértani sorozat egymást követő elemei, a legrövidebb oldala 1 egység hosszú. Számítsuk ki a háromszög másik két oldalának hosszát.*

b) Egy háromszög oldalhosszai egy mértani sorozat egymást követő elemei, a legrövidebb oldala 1 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazoljuk, hogy a háromszögnek nincs 60°-os szöge. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* Legyen a mértani sorozat hányadosa q. Ekkor a derékszögű háromszög befogói: 1 és q, az átfogója: q^2. Természetesen $q>1$, hiszen a háromszög legrövidebb oldalának hossza 1. A Pitagorasz-tétel alapján:

$$1+q^2=q^4, \qquad q^4-q^2-1=0.$$

Ez q^2-re nézve másodfokú egyenlet:

$$q_1^2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad q_2^2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Nyilvánvalóan csak a $q^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ jöhet szóba, innen pedig csak $q=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ lehet. Vagyis a derékszögű háromszög oldalainak hossza növekedő sorrendben:

$$1, \qquad \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \qquad \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

b) Legyen a mértani sorozat hányadosa q. Tudjuk, hogy $q>1$, hiszen a háromszög legrövidebb oldalának hossza 1. Ekkor a háromszög oldalainak hossza: 1, q, q^2. Ha a háromszög nem szabályos, és lenne 60°-os szöge, akkor az nagyság szerint a középső lenne. Ez a szög oldalhossz szempontjából a középsővel lenne szemben. Megmutatjuk, hogy ez nem lehetséges.

Írjuk fel a koszinusztételt az 1, q, q^2 oldalhosszúságú háromszögre, ha a q-val szemben 60°-os szög található:

$$q^2=1+q^4-2q^2\cdot\cos 60°=1+q^4-q^2,$$
$$0=q^4-2q^2+1=\left(q^2-1\right)^2.$$

Ebből csak a $q_1=-1$ és $q_2=1$ adódik, nincs $q>1$ megoldása az egyenletnek.

Vagyis a háromszögnek nincs 60°-os szöge.

9. *Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x)=x^3+(p-4)x^2+p^2x-2$, ahol p egy valós paraméter.*

a) Számítsuk ki a $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx$ határozott integrál értékét, ha $p=4$.

b) Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy az $x=2$ zérushelye legyen az f függvénynek.

c) Határozzuk meg azokat a p egész számokat, amelyekre az f függvény deriváltjának nincs zérushelye. (*16 pont*)

Megoldás. *a)* Ha $p=4$, akkor $f(x)=x^3+16x-2$. Ekkor a határozott integrál értéke:

$$\int_0^4\left(x^3+16x-2\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}+16\cdot\frac{x^2}{2}-2x\right]_0^4=\left[\frac{x^4}{4}+8x^2-2x\right]_0^4=64+128-8=184.$$

b) Azt a p paramétert keressük, amelyre:

$$f(2)=2^3+(p-4)\cdot 2^2+p^2\cdot 2-2=0.$$

A következő másodfokú egyenletet kapjuk p-re:

$$2p^2+4p-10=0,$$
$$p^2+2p-5=0.$$

A megoldóképlettel:

$$p_1=\frac{-2+\sqrt{4+20}}{2}, \qquad p_2=\frac{-2-\sqrt{4+20}}{2}.$$

Két megfelelő paramétert találtunk: $p_1=-1+\sqrt{6}$, $p_2=-1-\sqrt{6}$.

c) Írjuk fel az f deriváltját:

$$f'(x) = 3x^2 + 2(p-4)x + p^2.$$

Azt szeretnénk, hogy ennek a másodfokú függvénynek két különböző zérushelye legyen, azaz azokat a paramétereket keressük, amelyre a diszkrimináns pozitív:

$$\begin{aligned} D = 4(p-4)^2 - 12p^2 &> 0, \\ -8p^2 - 32p + 64 &> 0, \\ p^2 + 4p - 8 &< 0. \end{aligned}$$

Ennek a másodfokú kifejezésnek a két zérushelye közötti egész számok lesznek a feladat feltételeinek megfelelő paraméterek. A zérushelyek:

$$p_1 = \frac{-4 + \sqrt{16+32}}{2}, \qquad p_2 = \frac{-4 - \sqrt{16+32}}{2},$$

azaz $p_1 = -2 - 2\sqrt{3} \approx -5{,}46$, $p_2 = -2 + 2\sqrt{3} \approx 1{,}46$.

A keresett egész számok: -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1.