

Megoldásvázlatok a 2013/8. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

Számadó László

I. rész

1. Két konvex sokszög közül az elsőnek 540-nel több átlója van, mint a másodiknak, és az elsőnek háromszor annyi csúcsa van, mint a másodiknak. Hány csúcsuk van külön-külön? (11 pont)

Megoldás. Legyen a második sokszög csúcsainak száma n , az elsőé pedig $3n$. Ekkor a feladat szövege szerint:

$$\begin{aligned}\frac{3n(3n-3)}{2} - \frac{n(n-3)}{2} &= 540, \\ 9n^2 - n^2 - 9n + 3n &= 1080, \\ 4n^2 - 3n - 540 &= 0.\end{aligned}$$

Használjuk a megoldóképletet:

$$n_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 4 \cdot (-540)}}{8} = \frac{3 \pm 93}{8}.$$

Csak a pozitív egész megoldás jöhet szóba, vagyis $n = 12$. Tehát az elsőnek 36, a másodiknak 12 csúcsa van.

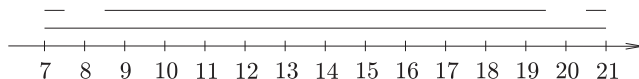
2. A miskolci pályaudvar utasellátó büféjének ajtaján a következő tájékoztató szöveg olvasható:

Nyitva tartás 03.30–23.30.

Műszakátadás miatt 07.30–08.30 és 19.30–20.30 között zárva!

- a) Mekkora eséllyel találjuk nyitva a büfét, ha reggel 7 és este 9 között véletlenszerűen érkezünk a bejáratához?
b) Egy vargabélest vásároltunk 200 Ft-ért. A pénzt pontosan kiszámolva adtuk át a pénztárosnak. Hányféleképpen tehettük ezt meg, ha 20 Ft-osnál kisebb címletet nem adtunk, és a sorrend nem számít?
c) Az utánunk következő vásárló három péksüteményt szeretne venni, a kínálat: diós búrkifli, izes levél, túrós táska, meggyes rétes és kakaós csiga. Mekkora eséllyel találjuk el, hogy mit fog vásárolni, ha azt feltételezzük, hogy mindegyik választásának ugyanannyi az esélye? (12 pont)

Megoldás. a) A vizsgált időszakot számegegyesen a $[7; 21]$ intervallummal szemléltethetjük. Ennek az intervallumnak a hossza 14. Műszakátadás miatt ebben az időszakban összesen 2 órát zárva van a büfé. Vagyis a kedvező pillanatokot ábrázolva a számegegyesen három darab, összesen 12 hosszúságú szakaszt kapunk.



A keresett valószínűség ezek alapján: $p = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$.

b) A felhasználható pénzürmék értéke: 200, 100, 50, 20. Vizsgáljuk az eseteket az átadott pénzürmék közötti legnagyobb értékű alapján. Ha a legnagyobb érme értéke 200 Ft, akkor az esetek az érmék értékének felsorolásával:

200.

Ha a legnagyobb érme értéke 100 Ft, akkor az esetek az érmék értékének felsorolásával:

$$\begin{aligned}100 + 100, \\ 100 + 50 + 50, \\ 100 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20.\end{aligned}$$

Ha a legnagyobb érme értéke 50 Ft, akkor az esetek az érmék értékének felsorolásával:

$$\begin{aligned}50 + 50 + 50 + 50, \\ 50 + 50 + 20 + 20 + 20 + 20.\end{aligned}$$

Ha a legnagyobb érme értéke 20 Ft, akkor az esetek az érmék értékének felsorolásával:

$$20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20.$$

Vagyis hétféleképpen tehetjük meg a 200 Ft kifizetését.

c) A következő vevő 5-féle péksüteményből választhat. Mivel a feladat szövege nem tiltja, azért egy péksüteményből akár többet is vehet. Ha egyféleből hármat venne, az 5 eset. Ha egyféleből kettőt venne, az 20 eset, hiszen 5-féleképpen választhatja ki, hogy melyikből vesz kettőt, majd a maradék négy bármelyikéből vásárolhat még egyet a két azonoshoz. Ha semelyikből nem venne egynél többet, az $\binom{5}{3}$, azaz 10 eset. Ez összesen 35 eset. Vagyis $\frac{1}{35}$ eséllyel találhatjuk el, hogy mit fog vásárolni az utánunk következő vásárló.

Megjegyzés. Ha ismerjük az ismétléses kombinációk számára vonatkozó képletet, akkor az összes esetek számát azonnal megkaphatjuk: $C_n^k(\text{ism}) = \binom{n+k-1}{k}$. Jelen esetben: $C_5^3(\text{ism}) = \binom{5+3-1}{3} = 35$.

3. Adott a koordináta-rendszerben négy pont: $A_1(0; 5)$, $B_1(1; 7)$, $A_2(3; 4)$, $B_2(5; 5)$. Tudjuk, hogy A_1A_2 és B_1B_2 két koncentrikus kör egy-egy húrja.

a) Hol van a körök közös középpontja?

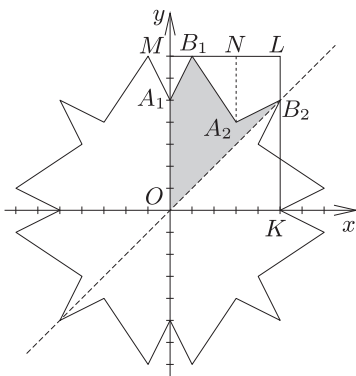
b) Tükrözzük az $A_1B_1A_2B_2$ töröttvonalat az első negyed szögfelezőjére, majd az eredeti és a képként kapott alakzatot tükrözzük mindkét tengelyre és az origóra is. Mekkora az így kapott sokszög kerülete, területe? (14 pont)

Megoldás. a) A körök közös középpontja illeszkedik az A_1A_2 húrnak az f_1 felezőmerőlegesére és a B_1B_2 húrnak az f_2 felezőmerőlegesére is. Vagyis ennek a két egyenesnek kell meghatározniuk a metszéspontját.

Az A_1A_2 felezőpontja: $F_1(\frac{3}{2}; \frac{9}{2})$, az f_1 egyik normálvektora: $\overrightarrow{A_1A_2}(3; -1)$. Vagyis az f_1 egyenes egyenlete: $3x - y = 0$.

A B_1B_2 felezőpontja: $F_2(3; 6)$, az f_2 egyik normálvektora: $\overrightarrow{B_1B_2}(4; -2)$. Vagyis az f_2 egyenes egyenlete: $4x - 2y = 0$. Mindkét egyenes origóra illeszkedik, tehát az origó a körök közös középpontja.

b) Használjuk az *ábra* jelöléseit. Az $OA_1B_1A_2B_2$ ötszög területe az első negyed szögfelezőjére (az OB_2 oldalegyenesre) történő tükrözés után duplázódik. Az összes tükrözés után pedig ennek az ötszögnek a területe nyolcszorozódik.



Az $OA_1B_1A_2B_2$ ötszög t területét megkaphatjuk, ha az $OKLM$ téglalap területéből levonjuk az OKB_2 , A_2NB_1 , A_1MB_1 derékszögű háromszögek és az A_2NLB_2 trapéz területét:

$$t = 5 \cdot 7 - \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{2 \cdot 3}{2} - \frac{1 \cdot 2}{2} - \frac{(2+3) \cdot 2}{2} = 13,5.$$

Vagyis a kérdésben szereplő sokszög területe:

$$T = 8t = 8 \cdot 13,5 = 108.$$

A tükrözések miatt a sokszög kerülete az $A_1B_1A_2B_2$ töröttvonal hosszának nyolcszorosa lesz:

$$K = 8 \cdot (A_1B_1 + B_1A_2 + A_2B_2) = 8 \cdot (\sqrt{5} + \sqrt{13} + \sqrt{5}) \approx 64,6.$$

4. Az 1, 6, 13, 24, 37, 54, 73, 96, 121, ... sorozat kettőnél nagyobb sorszámú tagjait úgy kaptuk, hogy a nála kettővel kisebb sorszámú taghoz hozzáadtuk a közbülső tag sorszámának hatszorosát. Már tudjuk, hogy a páros helyen álló számok a sorszám másodfokú függvényeként állíthatók elő. Mennyi a sorozat századik tagja? (14 pont)

Megoldás. A feladat szövege alapján a sorozat n -edik tagja a következő módon kapható meg: $a_n = a_{n-2} + 6(n-1)$. Mivel tudjuk, hogy a páros helyen álló számok a sorszám másodfokú függvényeként állíthatók elő, ezért páros n esetén a sorozat tagjait $a_n = an^2 + bn + c$ alakban keressük, ahol a , b és c valós együtthatók, de $a \neq 0$. Tudjuk, hogy $a_2 = 6$, $a_4 = 24$, $a_6 = 54$, ezért felírható a következő egyenletrendszer:

- (1) $4a + 2b + c = 6,$
- (2) $16a + 4b + c = 24,$
- (3) $36a + 6b + c = 54.$

Ha a nagyobb sorszámú egyenlet megfelelő oldalából kivonjuk az eggyel kisebb sorszámú egyenlet megfelelő oldalát (és osztunk 2-vel), akkor már csak két ismeretlen marad, két egyenlettel:

$$\begin{aligned} 6a + b &= 9, \\ 10a + b &= 15. \end{aligned}$$

Újabb kivonás, majd visszahelyettesítések után: $a = \frac{3}{2}$, $b = 0$, $c = 0$. Azaz $a_n = \frac{3}{2}n^2$. Ekkor $a_{100} = \frac{3}{2} \cdot 100^2 = 15\,000$.

II. rész

5. Adott három egyenes az egyenletével:

$$a: x + 3y = 7, \quad b: 3x - y = -7, \quad c: 3x + 4y = 8.$$

- a) Mutassuk meg, hogy a három egyenes derékszögű háromszöget határoz meg.
 b) Milyen messze van a derékszögű csúcs a szemközti oldal felezőpontjától?
 c) Mekkora a háromszög beírt körének sugara? (16 pont)

Megoldás. Az egyenesek egyenletének ismeretében tudjuk mindhárom egyenes normálvektorának koordinátáit: $\mathbf{n}_a(1; 3)$, $\mathbf{n}_b(3; -1)$, $\mathbf{n}_c(3; 4)$. Mivel $\mathbf{n}_a \cdot \mathbf{n}_b = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 0$, azért ez a két normálvektor merőleges egymásra. Vagyis a rájuk merőleges a , illetve b egyenesek is merőlegesek.

Meg kell még vizsgálnunk, hogy a három egyenes valóban háromszöget határoz-e meg. A koordinátákból látható, hogy nincs olyan λ_1 valós szám, hogy $\mathbf{n}_a = \lambda_1 \cdot \mathbf{n}_c$, így $\mathbf{n}_a \nparallel \mathbf{n}_c$, azaz $a \nparallel c$.

Hasonlóan az előzőhöz, nincs olyan λ_2 valós szám, hogy $\mathbf{n}_b = \lambda_2 \cdot \mathbf{n}_c$, így $\mathbf{n}_b \nparallel \mathbf{n}_c$, azaz $b \nparallel c$.

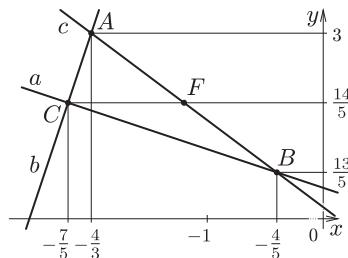
Mivel az $x + 3y = 7$, $3x - y = -7$ egyenletrendszernek $x = -\frac{7}{5}$, $y = \frac{14}{5}$ a megoldása, azért az a és b egyenesek metszéspontja: $C(-\frac{7}{5}; \frac{14}{5})$. Ha ezeket a koordinátákat behelyettesítjük a c egyenes egyenletébe, akkor látható, hogy a C pont nem illeszkedik a c egyenesre, hiszen $3 \cdot (-\frac{7}{5}) + 4 \cdot \frac{14}{5} \neq 8$.

Vagyis a három egyenes derékszögű háromszöget határoz meg.

Megjegyzés. Az a és b egyenesek merőlegessége csak szükséges, de nem elegendő feltétel. A fentiekben láthattunk egy gondolatmenetet arra, hogy a háromszög csúcsainak meghatározása nélkül is megmutatható a háromszög létezése. Természetesen a csúcsok koordinátáinak kiszámításával is belátható, hogy a háromszög létezik.

b) A $3x - y = -7$, $3x + 4y = 8$ egyenletrendszer megoldásával ($x = -\frac{4}{3}$, $y = 3$) kapjuk a háromszög egyik csúcsát: $A(-\frac{4}{3}; 3)$.

Az $x + 3y = 7$, $3x + 4y = 8$ egyenletrendszer megoldásával ($x = -\frac{4}{5}$, $y = \frac{13}{5}$) kapjuk a háromszög másik csúcsát: $B(-\frac{4}{5}; \frac{13}{5})$.



A C csúcsnál található a derékszög, az A , illetve B csúcsok koordinátáinak ismeretében pedig az AB oldal $F(f_1; f_2)$ felezőpontjának koordinátái meghatározhatók:

$$f_1 = \frac{-\frac{4}{3} - \frac{4}{5}}{2} = -\frac{16}{15}, \quad f_2 = \frac{3 + \frac{13}{5}}{2} = \frac{14}{5}.$$

A keresett szakasz hossza:

$$CF = \sqrt{\left(-\frac{16}{15} + \frac{7}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5} - \frac{14}{5}\right)^2} = \frac{1}{3}.$$

Megjegyzés. Készítettünk ábrát, de a koordináta-geometriának pontosan az az egyik „szépsége”, hogy ábra készítése nélkül is tökéletesen végigvihető a számolás.

c) A háromszög csúcsainak ismeretében:

$$AC = \sqrt{\left(-\frac{7}{5} + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{14}{5} - 3\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{15},$$

$$BC = \sqrt{\left(-\frac{7}{5} + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{14}{5} - \frac{13}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{5},$$

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{4}{5} + \frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{13}{5} - 3\right)^2} = \frac{2}{3}.$$

Az ABC derékszögű háromszög területét felírhatjuk a két befogó hosszának ismeretében:

$$t_{ABC} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{15} \cdot \frac{\sqrt{10}}{5}}{2} = \frac{1}{15}.$$

Az ABC derékszögű háromszög kerületének fele az oldalak hosszának ismeretében:

$$s = \frac{k_{ABC}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{15} + \frac{\sqrt{10}}{5} + \frac{2}{3}}{2} = \frac{2\sqrt{10} + 5}{15}.$$

Az ABC derékszögű háromszög területére felírhatjuk a következő összefüggés: $t_{ABC} = \varrho \cdot s$, ahol ϱ a beírt kör sugarának a hossza. Az ismert mennyiségeket behelyettesítjük:

$$\frac{1}{15} = \varrho \cdot \frac{2\sqrt{10} + 5}{15}, \quad \text{vagyis} \quad \varrho = \frac{1}{2\sqrt{10} + 5}.$$

A nevező gyöktelenítése után: $\varrho = \frac{2\sqrt{10} - 5}{15}$ ($\approx 0,088$).

6. Adott egy függvény a hozzárendelési utasításával:

$$f(x) = \frac{\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}}{\frac{x-2}{x+2} + 1}.$$

a) Adjuk meg azt a legbővebb halmazt, amely az $f(x)$ értelmezési tartománya lehet.

b) Adjuk meg $f(x)$ értékkészletét.

c) Hány rácspontra illeszkedik $f(x)$ grafikonjára? Adjuk meg ezeket a pontokat.

(16 pont)

Megoldás. a) A hozzárendelési utasításban a nevezők ne legyenek nullák. Vagyis $x \neq 2$, $x \neq -2$, illetve $\frac{x-2}{x+2} + 1 \neq 0$. Ez utóbbinak a bal oldalán közös nevezővel írjuk a két tagot:

$$\frac{x-2+x+2}{x+2} = \frac{2x}{x+2} \neq 0, \quad \text{azaz} \quad x \neq 0.$$

Vagyis a legbővebb halmaz, ami az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya lehet: $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 0; 2\}$.

b) Hozzuk egyszerűbb alakra a hozzárendelési utasításban szereplő kifejezést:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x+2}{x-2} - \frac{x-2}{x+2}\right) : \left(\frac{x-2}{x+2} + 1\right) &= \frac{(x+2)^2 - (x-2)^2}{(x-2)(x+2)} : \frac{x-2+x+2}{x+2} = \\ &= \frac{8x}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{x+2}{2x} = \frac{4}{x-2}. \end{aligned}$$

Tudjuk, hogy a $g(x) = \frac{4}{x-2}$ hozzárendeléssel adott függvény a $h(x) = \frac{1}{x}$ transzformációjával adódik, így azt is tudjuk, hogy az értékkészlete: $g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Az általunk vizsgált $f(x)$ függvény két hely kivételével azonos értékeket vesz fel, mint a $g(x)$.

Mivel $g(-2) = -1$, $g(0) = -2$, és ezeken a helyeken az $f(x)$ nincs értelmezve, azért az $f(x)$ értékkészlete: $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \{-2; -1; 0\}$.

c) A kérdést így is megfogalmazhatjuk: Hány darab olyan x egész szám van az $f(x)$ értelmezési tartományában, amelyre a $\frac{4}{x-2}$ az $f(x)$ értékészletében lévő egész szám lesz? A nevezőben szereplő $x-2$ a 4 osztója kell, hogy legyen. Ezek alapján az $x-2$ lehetséges értékei: $-4; -2; -1; 1; 2; 4$. Ekkor az x értékei rendre: $-2; 0; 1; 3; 4; 6$. A -2 és a 0 nincs benne az értelmezési tartományban, ezért ezekkel az értékekkel nem kell tovább foglalkoznunk. A maradék négy számhoz a $\frac{4}{x-2}$ értékei rendre: $-4; 4; 2; 1$. Tehát négy darab rácspontra illeszkedik $f(x)$ grafikonjára: $A(1; -4)$, $B(3; 4)$, $C(4; 2)$, $D(6; 1)$.

7. A Pontos lépés nevű játéknak László szabályos hatszög alaplapú egyenes hasáb alakú dobozt tervez. A doboz alaplapja az $ABCDEF$, fedőlapja pedig a $GHIJKL$ szabályos hatszög.

a) Mekkora lenne az $ABHG$ oldallap területe, ha az $ABIL$ metszet területe 72 cm^2 -es?

b) Mekkora lenne az alaplap és az $ABIL$ sík hajlásszöge $AL = \sqrt{2} \cdot AB$ esetén?

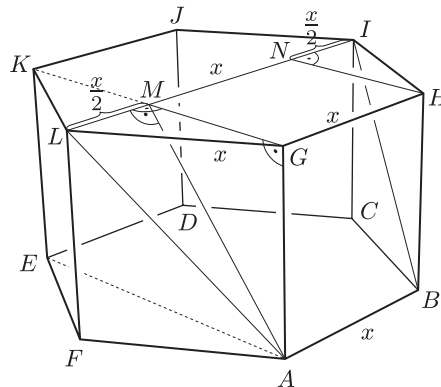
(16 pont)

Megoldás. a) Legyen $AB = x$, ekkor $LI = 2x$, hiszen a szabályos hatszög oldaláról és a hosszabb átlójáról van szó. Tudjuk, hogy ezen két párhuzamos egyenes távolsága 8 cm , azaz $AM = 8$.

Az LGM derékszögű háromszögben $LM = \frac{x}{2}$, $LG = x$, ezért $MG = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Az AMG derékszögű háromszögben az AM és az MG oldalhosszakat már kifejeztük, így

$$AG = \sqrt{8^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} = \sqrt{64 - \frac{3}{4}x^2}.$$



Az $ABHG$ oldallap területe x segítségével kifejezve:

$$t_{ABHG} = AB \cdot AG = x \cdot \sqrt{64 - \frac{3}{4}x^2}.$$

Írjuk fel az $ABIL$ húrtrapéz területét is:

$$t_{ABIL} = \frac{(AB + IL)AM}{2} = \frac{(x + 2x) \cdot 8}{2} = 12x = 72.$$

Ebből kapjuk, hogy $x = 6$. Tehát:

$$t_{ABHG} = 6 \cdot \sqrt{64 - \frac{3}{4} \cdot 6^2} = 6 \cdot \sqrt{37} \approx 36,5 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

b) Jelöljük most is a szabályos hatszögek oldalainak hosszát x -szel. A feladat feltétele szerint most $AL = \sqrt{2} \cdot x$. Vagyis az AFL derékszögű háromszög egyenlőszárú: $FL = x$, azaz a két párhuzamos alaplap távolsága x .

A szabályos hatszögben $MG = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ adódik ebben az esetben is. A szabályos hatszög és az egyenes hasáb tulajdonságait felhasználva kapjuk, hogy a keresett szög az EAM szög, amivel azonos nagyságú az AMG szög, hiszen váltószögek. Az AMG derékszögű háromszögben felírhatjuk ennek a szögnek a tangensét:

$$\frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

A keresett hajlásszög kb. $49,1^\circ$.

8. a) Az $f(x) = 4 - x^2$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjához az 1 és a -1 abszcisszájú pontjában húzott érintők, valamint az x tengely meghatároz egy háromszöget. A háromszöget a függvény görbéje mentén szétvágjuk. Mekkora a függvény görbéje mellett jobbra, balra és fönt keletkezett síkidomok területének összege?

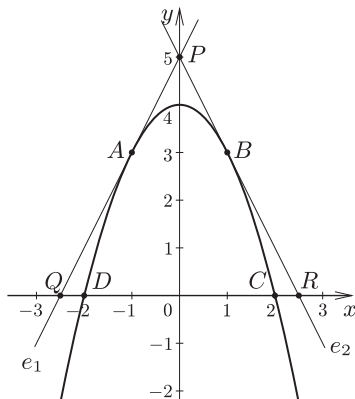
b) Egy alagút keresztmetszetét jó közelítéssel az $f(x) = 4 - x^2$ hozzárendelésű függvény grafikonja és az x tengely adja. A koordináta-rendszer egysége 1 méternek felel meg. Mekkora a maximális térfogata annak a 6 méter hosszú téglatestnek, amit egyik lapján csúsztatva át lehet tolni az alagúton? (16 pont)

Megoldás. a) Mivel $f(-1) = 4 - (-1)^2 = 3$, $f(1) = 4 - 1^2 = 3$, azért az $A(-1; 3)$, és a $B(1; 3)$ pontokra illeszkedő érintőkről van szó.

Az érintő meredekségét az első derivált adja: $f'(x) = -2x$.

Mivel $f'(-1) = -2 \cdot (-1) = 2$, azért az A pontra illeszkedő e_1 érintő egyenlete: $y - 3 = 2(x + 1)$.

Mivel $f'(1) = -2 \cdot 1 = -2$, azért a B pontra illeszkedő e_2 érintő egyenlete: $y - 3 = -2(x - 1)$. Az érintők egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldása adja a két egyenes metszéspontjának koordinátáit: $P(0; 5)$.



Az e_1 érintő a $Q(-\frac{5}{2}; 0)$, az e_2 érintő az $R(\frac{5}{2}; 0)$ pontban metszi az x tengelyt. Ezek alapján a PQR egyenlőszárú háromszög területe:

$$t_{PQR} = \frac{QR \cdot OP}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2}.$$

Az $f(x)$ grafikonja a $C(2; 0)$ és a $D(-2; 0)$ pontokban metszi az x tengelyt. Ezért a függvény görbealatti területét a következő integrál adja:

$$t_1 = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = \frac{32}{3}.$$

A kért síkidomok területének összegét a PQR háromszög területének és a t_1 területnek a különbsége adja:

$$t = \frac{25}{2} - \frac{32}{3} = \frac{11}{6}.$$

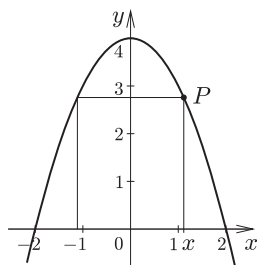
b) Az adatok alapján megállapítható, hogy a téglatest 6 méteres élét vízszintes helyzetben kell csúsztatni. Vagyis a rá merőleges téglalap területének kell maximálisnak lenni.

Készítsünk vázlatrajzot és használjuk a jelöléseit. A kérdéses téglalap területe:

$$t(x) = 2x(4 - x^2) = 8x - 2x^3.$$

Ennek a függvénynek keressük a maximumhelyét a $[0; 2]$ intervallumon. Vizsgáljuk az első deriváltjának a zérushelyeit:

$$f'(x) = 8 - 6x^2 = 0.$$



Az adott intervallumon:

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ezen a helyen a derivált előjelet vált (pozitívról negatívra), vagyis valóban a függvénynek ezen a helyen maximuma van. Ezek alapján a maximális térfogatú téglatest élének hossza: $2x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, $4 - x^2 = \frac{8}{3}$, 6. Tehát a térfogata:

$$V = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot 6 = \frac{192\sqrt{3}}{9} \approx 36,95 \text{ (m}^3\text{)}.$$

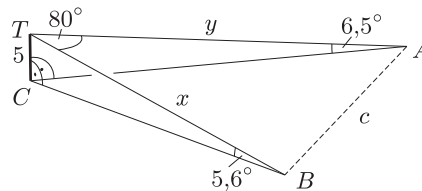
9. Sík talajon az 5 méter magas, függőlegesen álló oszlop teteje a sík A pontjából $6,5^\circ$, a B pontjából pedig $5,6^\circ$ emelkedési szögben látszik. Az oszlop tetejéről az AB távolság 80° -os látószög alatt látható.

a) Írjuk le röviden, hogy hogyan határoznánk meg az ABC háromszög területét (C az oszlop alja), ha az AB hosszát ismernénk.

b) Mekkora az AB távolság?

(16 pont)

Megoldás. a) Készítsünk ábrát és használjuk az ábra jelöléseit.



Az ACT derékszögű háromszögben a CT hosszának, és az A csúcsnál lévő szög nagyságának ismeretében, tangens használatával az AC hossza meghatározható. A BCT derékszögű háromszögben a CT hosszának, és a B csúcsnál lévő szög nagyságának ismeretében, tangens használatával az BC hossza meghatározható.

Mivel a szöveg szerint AB hosszát ismerjük, azért az ABC háromszögben minden oldal hossza így ismert lett. Felírhatjuk a koszinusztételt például a C csúcsnál található szög felhasználásával. Így ez a γ szög is ismert lesz. Ezek után:

$$t_{ABC} = \frac{CA \cdot CB \cdot \sin \gamma}{2}.$$

Megjegyzés. A három oldal hosszának ismeretében a Heron-féle képletet is használhatjuk a háromszög területének meghatározására.

b) Az ACT derékszögű háromszögben: $\sin 6,5^\circ = \frac{5}{y}$, azaz $y = \frac{5}{\sin 6,5^\circ}$. A BCT derékszögű háromszögben: $\sin 5,6^\circ = \frac{5}{x}$, azaz $x = \frac{5}{\sin 5,6^\circ}$.

Írjuk fel az ABT háromszögre a koszinusztételt:

$$c^2 = \left(\frac{5}{\sin 6,5^\circ} \right)^2 + \left(\frac{5}{\sin 5,6^\circ} \right)^2 - 2 \cdot \frac{5}{\sin 6,5^\circ} \cdot \frac{5}{\sin 5,6^\circ} \cdot \cos 80^\circ, \quad c \approx 61,6.$$

Vagyis az AB távolság kb. 61,6 méter.