Egy nehéz Arany Dániel feladatról
és egy szokatlan egyenlőtlenségről
I. rész

Bevezető

A 2012/2013-as Arany Dániel matematika verseny döntői során az alábbi feladat bizonyult a legnehezebbnek:

2013 *valós számra fennáll:*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{2012} \geq a_{2013} \geq 0, \quad \text{valamint}$$

$$a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \geq \frac{61}{4}. \tag{N}$$

Igazoljuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2012} + a_{2013} \geq \sqrt{2013}$*!*

Lehet-e a fenti 2013 *tagú összeg pontosan* $\sqrt{2013}$*?*

Egy teljesnek mondható megoldás született, és lényeges részeredményekig is csak néhány versenyző jutott el a verseny során. Az első részben több megoldást mutatunk a feladatra, a folytatásban pedig a megoldásokban rejtett vagy kevésbé rejtett módon felhasznált szokatlan egyenlőtlenséget vizsgáljuk meg.

A cikk átnézéséért köszönet illeti Frankl Nórát, Csajbók Bencét és Forrás Bencét, akik sokat segítettek a hibák és pontatlanságok javításában.

Tudva, hogy a történetek még a matematikában sem érnek véget, az idősebbik szerző szeretettel ajánlja a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium 11.c osztályának ezt az epizódot.

1. megoldás. „Vegyük észre! ...”

Ez volt a „hivatalos” megoldás. Csupa egyszerű észrevételből jön ki – mint például $2013 = 61 \cdot 33$*, meg hogy nagyobb pozitív számok szorzata nagyobb ... Talán ezért olyan reménytelen rátalálni.*

Tekintsük a 2013 számot egy véges, monoton csökkenő számsorozatnak. A számok összegét jelöljük S-sel, az első 33 tag összege legyen S_1, a további tagoké pedig S_2. Erre a két részre egymástól függetlenül keresünk alsó becslést. Kiderül majd, hogy ez a két becslés egyáltalán nem független, sőt ...

$$S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{33} \geq 33 \cdot a_{33}, \tag{1}$$

hiszen a sorozat monoton csökken.

S_2 becsléséhez először is cseréljünk ki minden egyes a_k^2 tagot az (N) egyenlőtlenség bal oldalán a nála (ugyancsak a tagok monoton csökkenése miatt) nem kisebb $a_{33} \cdot a_k$ tagra. Ezzel a négyzetösszeg nő, de éppen így lesz ebből alsó becslés S_2-re.

$$\frac{61}{4} \leq a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \leq a_{33} \cdot \underbrace{(a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013})}_{S_2}. \tag{2}$$

Mivel a_{33} pozitív – miért? – oszthatunk vele:

$$S_2 \geq \frac{61}{4 \cdot a_{33}}. \tag{3}$$

Ha összeadjuk (1)-et és (3)-at:

$$S = S_1 + S_2 \geq 33 \cdot a_{33} + \frac{61}{4 \cdot a_{33}},$$

akkor a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel minden a helyére kerül:

$$S \geq 33 \cdot a_{33} + \frac{61}{4 \cdot a_{33}} \geq 2 \cdot \sqrt{33 \cdot a_{33} \cdot \frac{61}{4 \cdot a_{33}}} = \sqrt{2013}\,.$$

Ezt kellett bizonyítani.

Az egyenlőséghez az kell, hogy valamennyi becslésünkben egyenlőség álljon. Az utolsó becslésben tehát

$$33 \cdot a_{33} = \frac{61}{4 \cdot a_{33}}, \quad \text{azaz} \quad a_{33} = \sqrt{\frac{61}{4 \cdot 33}}\,.$$

Az (1) becslés miatt az első 33 tag egyenlő kell legyen: $a_1 = a_2 = \ldots = a_{33}$.

A (3) becslés miatt pedig valamennyi ($k > 33$) tagra $a_k^2 = a_{33} \cdot a_k$. Ez pontosan akkor teljesül, ha $a_k = a_{33}$ vagy $a_k = 0$.

Mivel most $a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 = \frac{61}{4} = 33 \cdot a_{33}^2$, ez a monotonitás miatt csak úgy lehetséges, ha $a_{34} = a_{35} = \ldots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{132}}$, a további tagok értéke pedig nulla.

Összefoglalva: egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha a sorozat első 66 tagja egyenlő – a közös értékük $\sqrt{\frac{61}{132}}$ – a további tagok pedig szintén egyenlők, értékük 0.

Megjegyzések: 1. 2009-ben a bosnyák olimpiai csapat válogatóversenyén szerepelt egy hasonló példa, amely az ezen cikk végén kitűzött feladatok közül az első.

2. Ha a megszokás által vezérelve azt feltételezzük, hogy egyenlő a_i-k esetén minimális S, akkor nagyon rossz becslést kapunk:

$$2013 \cdot \sqrt{\frac{61}{4 \cdot (2013 - 33)}} > \sqrt{31\,209}\,.$$

3. A megoldás lényegesen lerövidíthető, ha a (2) becslést az a_{33} helyett az $a_1, \ldots, a_{33}$ számok átlagával írjuk fel:

$$\frac{61}{4} \le a_{34}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \le a_{33}(a_{34} + \ldots + a_{2013}) \le \frac{a_1 + \ldots + a_{33}}{33}(a_{34} + \ldots + a_{2013}) = \frac{S_1 S_2}{33}.$$

Ezután a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget alkalmazva,

$$S = S_1 + S_2 \ge 2\sqrt{S_1 S_2} \ge 2\sqrt{33 \cdot \frac{61}{4}} = \sqrt{2013}\,.$$

2. megoldás. „A sakkjátszma ...”

(Janzer Barnabás dolgozata alapján)

Az S összeget most is az első megoldás S_1 és S_2 részeire bontjuk. Az S_1 tagjai minden további nélkül csökkenthetők úgy, hogy valamennyien a pozitív a_{34}-gyel legyenek egyenlők, ezzel sem a feltételek nem változnak, sem pedig a bizonyítandó állítás. Az S_2 összeg tagjait próbáljuk majd módosítani úgy, hogy a négyzetösszegük ne csökkenjen – és így ne sérüljön az (N) feltétel – az összegük pedig eközben lehetőség szerint ne nőjön. Mint majd kiderül, adott négyzetösszeg mellett S_2 akkor lesz a legkisebb, ha a tagok valamilyen értelemben távol vannak egymástól. A támadás eszköze ezért egy „széthúzó” algoritmus lesz. Hogy aztán sikerül-e a támadás, az majd elválik ...

Először is „észrevesszük”, hogy ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{132}}$, és $a_{67} = a_{68} = \ldots = a_{2013} = 0$, akkor egyenlőség teljesül, vagyis $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013} = \sqrt{2013}$.

Ezután megmutatjuk, hogy minden más esetben tudjuk úgy módosítani az a_i számokat, hogy a feltételek érvényben maradjanak, a számok összege ne nőjön, és végül legalább $\sqrt{2013}$ legyen.

Az első szándékú terv a következő: az a_{34}, a_{35}, ... számokat lépésenként párosával módosítjuk úgy, hogy a négyzetösszegük egyáltalán ne változzon, a kis indexűek – a nagyok – a_{34}-hez, a nagy indexűek – a kicsik – pedig a 0-hoz közeledjenek. A következő lemma szerint ez a módosítás nem növeli (általában csökkenti) a számok összegét.

F-lemma: *Ha $x \ge y \ge 0$, és x-et megnöveljük, y-t pedig csökkentjük (de legfeljebb nulláig) úgy, hogy az új számok négyzetösszege megegyezzen az $x^2 + y^2$ összeggel, akkor a kapott számok összege nem nagyobb, mint $x + y$.*

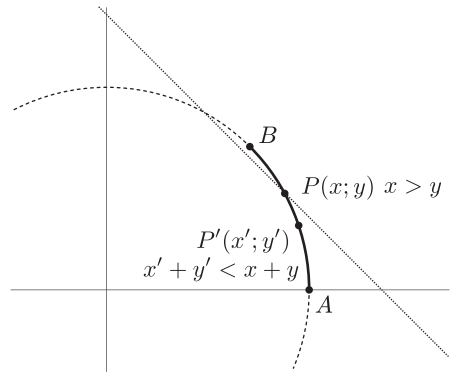
Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $x \ge y > 0$. Legyen $a, b > 0$ és

$$x^2 + y^2 = (x + a)^2 + (y - b)^2.$$

Innen $2yb - 2xa = a^2 + b^2 > 0$, vagyis $yb > xa$. Ez csak úgy lehetséges, ha $b > a$, hiszen $y \le x$. Tehát

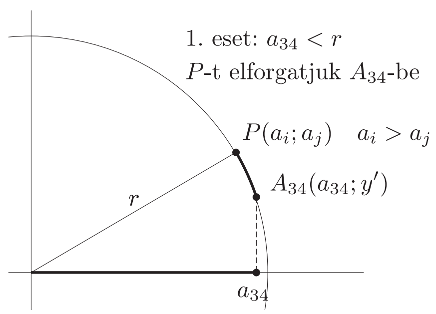
$$x + a + y - b = x + y - (b - a) < x + y.$$

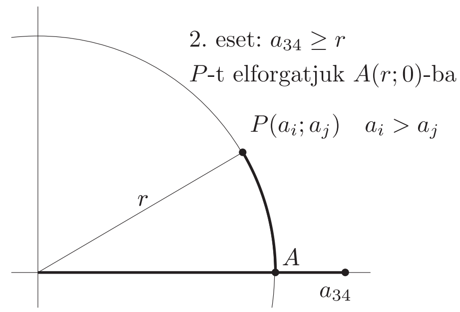
Megjegyzés: Az állítás leolvasható az *ábráról* is: ha $x > y$, akkor a P az AB nyolcadköríven van, így pedig P-ből az A felé a köríven elmozdulva a koordináták négyzetösszege nem változik, az összegük pedig csökken.



Rögzítsük tehát a_{34} értékét. A sorozat első 33 elemét a megállapodás szerint csökkentsük a_{34}-re, és ezután már ne zaklassuk őket. A 34-nél nagyobb indexű elemeket párosával „húzzuk szét”; bár az ábra alapján kifejezőbb volna egy-egy számpár, illetve a megfelelő pont „elforgatásáról” beszélni.

Először az (a_{35}, a_{2013}) párt forgatjuk el: ha a_{35} értéke eléri a_{34}-et, vagy a_{2013} eléri nullát, megállunk. A következő párhoz mindig vesszük a legkisebb indexű olyan elemet, amely kisebb a_{34}-nél, és a legnagyobb indexű olyat, amely még pozitív, és velük folytatjuk az eljárást. A két lehetőséget mutatják az *ábrák.*





Az első esetben a sorozat a_{34}-gyel egyenlő elemeinek a száma növekszik eggyel, a másodikban pedig a sorozat végén lévő nulláké. Az eljárás tehát véges sok lépésben befejeződik, elfogynak az elforgatható párok. A lépések során a négyzetösszeg nem változik, a sorozat marad monoton csökkenő és a számok összege csökken. Kétféleképpen maradhatunk elforgatható pár nélkül:

i) a sorozat minden pozitív eleme a_{34}-gyel egyenlő, a sorozat $x, x, \ldots, x, 0, \ldots, 0$ alakú;

ii) a sorozatnak egyetlen olyan pozitív eleme van, amely kisebb a_{34}-nél, a sorozat $x, x, \ldots, x, y, 0, \ldots, 0$ alakú, ahol $x > y > 0$.

Az persze mindkét esetben megeshet, hogy a sorozat végén egyáltalán nincsenek nullák, de ennek nincs jelentősége.

Az első esetben gyorsan kapjuk a bizonyítandó állítást. Ha a fenti *i*) sorozatnak összesen $33 + m$ darab pozitív, egyenként x értékű eleme van, akkor az eljárás e sorozat elemeinek a „levágott” négyzetösszegére is biztosítja, hogy

$$mx^2 \geq \frac{61}{4}, \quad \text{ahonnan} \quad x \geq \sqrt{\frac{61}{4m}}.$$

Mivel a forgatások során a sorozat elemeinek az összege nem nőtt (általában csökkent), azért

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013} \geq (33 + m)x \geq (33 + m) \cdot \sqrt{\frac{61}{4m}} = \frac{1}{2}\left(33 \cdot \sqrt{\frac{61}{m}} + m \cdot \sqrt{\frac{61}{m}}\right).$$

A jobb oldalon két szám számtani közepe áll, amelyek mértani közepe éppen $\sqrt{2013}$, és így az állítás ebben az *i*) esetben valóban igaz.

A megoldás befejező részében megmutatjuk, hogy bár forgatni a második esetben már nem tudunk, ahhoz ugyanis egy párra volna szükség 0 és x között, de a „teljes mezőny széthúzásával” most is eljuthatunk egy alkalmas, *i*) típusú sorozathoz, amelyben tehát már csak egy pozitív érték fordul elő. Azt pedig az imént láttuk, hogy ilyenkor hogyan fejezhető be a megoldás. Most azonban változtatunk a stratégián: nem a számok négyzetösszegét tartjuk meg, hanem az összegüket, mégpedig úgy, hogy az első 33 elem elhagyása után megmaradó számok négyzetösszege – az (N) feltétel erre a „levágott” négyzetösszegre vonatkozik! – eközben növekedjék vagy legalábbis ne csökkenjen. Mindenesetre adott sorozat esetén jelöljük ezt az $a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2$ összeget $Q(a)_{34}$-gyel.

Hogy az élet ne legyen olyan egyszerű, ezt a széthúzást másként kell csinálni akkor, ha az *ii*) sorozatnak viszonylag sok pozitív eleme van és másként akkor, ha kevesebb. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy az *ii*) sorozat elhagyott elemeinek a száma, 33, milyen viszonyban áll m-el.

I. eset: $33 \leq m$. Ekkor az *ii*) sorozat y tagját 0-ra cseréljük, értékét pedig igazságosan szétosztjuk az összesen $(33+m)$ darab pozitív, egyenként x értékű pozitív tag között. Az új, immár *i*) típusú sorozat

$$\underbrace{\tilde{x}, \tilde{x}, \ldots, \tilde{x}}_{33+m}, 0, \ldots, 0 \quad \text{alakú,} \quad \text{ahol} \quad \tilde{x} = x + \frac{y}{33+m}.$$

A kapott nemnegatív elemű $\tilde{x}$ sorozat monoton csökkenő marad, elemeinek összege pedig nem változott. Meg kell mutatnunk, hogy az (N) feltétel sem sérült, a levágott négyzetösszeg nőtt, azaz

$$Q(x)_{34} = mx^2 + y^2 \leq Q(\tilde{x})_{34} = m\left(x + \frac{y}{33+m}\right)^2.$$

A jobb oldal értéke nem nő, ha a nevezőben $33+m$ értékét $2m$-re növeljük. Beszorzás és rendezés után kapjuk, hogy elegendő, ha

$$4my^2 \leq 4mxy + y^2,$$

ez pedig $0 < y < x$ miatt „vastagon" igaz.

Ha viszont $m < 33$, akkor ez a becslés nem működik (tessék ellenőrizni!) és így az *ii*) sorozat fenti módosítása nem vezet eredményre. Ezt a bonyodalmat a megoldás ismertetése közben, a „tábla mellett" átlátni, megemészteni a kudarcot és hideg fejjel itt is megtalálni a nyerő kombinációt … bravúros teljesítmény!

II. eset: $m < 33$. A megoldó ebben az esetben az összesen $34+m$ darab pozitív elem mindegyikét az átlagukkal,

$$\bar{x} = \frac{(33+m)x + y}{34+m}\text{-mel}$$

helyettesíti. A sorozat elemeinek az összege nem változik, így a már látottak szerint most is annyit kell megmutatni, hogy a levágott négyzetösszeg nem csökkent, azaz

$$mx^2 + y^2 \leq (m+1) \cdot \bar{x}^2 = (m+1) \cdot \left(\frac{(33+m)x + y}{34+m}\right)^2.$$

A megoldónak ezt a – teljes megoldáshoz egyedül hiányzó – állítást is sikerült utólag igazolnia. Ahelyett, hogy ideiktatnánk a számolást, az állítás bizonyítását feladatul tűzzük ki az Olvasó számára. A kérdésre egyébként a cikk második részében visszatérünk.

Megjegyzés. Bár a feladat szövege nem kérte, az első megoldásban pontosan tisztáztuk, hogy a megadott feltételek mellett mikor van egyenlőség. Akinek van hozzá kedve, vizsgálja meg ebből a szempontból a második megoldás lépéseit.

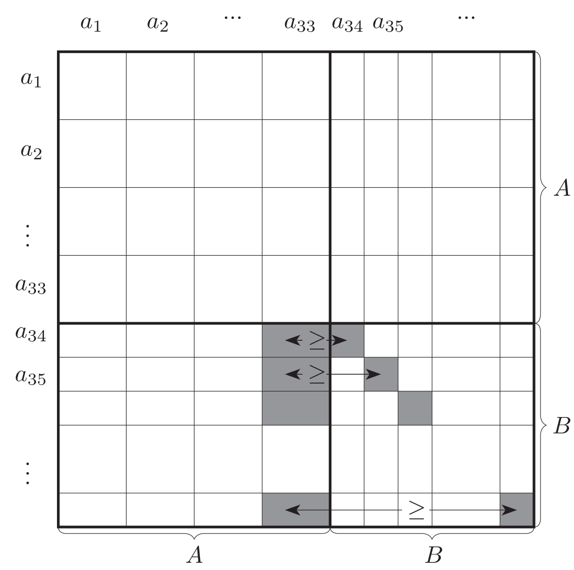
3. megoldás. „Látványmatematika"

(Sztranyák Attila megoldása, Cserháti Zoltán ötlete alapján)

Mind ez idáig nem foglalkoztunk azzal, hogy feladatunkban különböző dimenziójú egyenlőtlenségek szerepelnek. Egy másodfokú feltétel mellett kell egy elsőfokú kifejezés minimumát megadni. Természetes gondolat, hogy a másodfokú kifejezést értelmezzük egy alakzat területeként, az elsőfokút pedig egy szakasz hosszaként, másrészt hogy a bizonyítandó állítás dimenzióját egy négyzetre emeléssel a feltételéhez igazítsuk.

Rajzoljunk fel egy négyzetet, amelynek oldala $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013}$, és osszuk fel vízszintes és függőleges egyenesekkel téglalapokra úgy, hogy a „sávok" szélessége balról jobbra és fentről lefelé éppen $a_1, a_2, \ldots, a_{2013}$ legyen. Ha $A = a_1 + a_2 + \ldots + a_{33}$ és $B = a_{34} + \ldots + a_{2013}$, akkor a fenti felosztás úgy is tekinthető, mint egy $(A+B)^2$ „típusú" felosztás.

Az állítást a megállapodás szerint $(A+B)^2 = (a_1 + a_2 + \ldots a_{2013})^2 \geq 2013$ alakban igazoljuk, és mint kiderül, a bizonyítás két egyszerű észrevételen múlik. Az egyik örökzöld alsó korlát az $(A+B)^2$ értékére, a másik pedig az $A \cdot B$ szorzatra itt és most érvényes alsó becslés.



1. $(A+B)^2 \geq 4AB$, ez lényegében a számtani és mértani közép egyenlőtlensége két tagra.
2. Ami izgalmasabb, hogy az *ábrán* látható $A \cdot B$ területű téglalapok területe is becsülhető alulról. Ugyanis – felhasználva az a_i számokra vonatkozó monotonitási feltételt, ami a megoldás egyik kulcsa – ezek a téglalapok 33 olyan téglalapra vághatók, amelyek egyenként nagyobb területűek, mint a jobb alsó átlóban található négyzetek területének összege. Tehát $A \cdot B \geq 33 \cdot \dfrac{61}{4}$.

Megdöbbentő, de lényegében készen vagyunk; a két becslés együtt éppen kiadja a bizonyítandó állítást:

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013})^2 = (A+B)^2 \geq 4AB \geq 4 \cdot 33 \cdot \frac{61}{4} = 2013.$$

Egyenlőség akkor teljesül, ha mindkét becslésben egyenlőség áll. Az algebrai feltételnél ez $A = B$ esetén igaz.
A területekre vonatkozó feltételeknél pedig az kell, hogy az A szélességű sávban minden téglalap ugyanolyan széles legyen, mint B-beli megfelelője. A satírozott téglalapokat összehasonlítva innen kapjuk, hogy $a_1 = a_{34}$, $a_1 = a_{35}$, $a_1 = a_{36}$, $\ldots$. Az $A = B$ feltétel miatt pedig ez csak úgy lehetséges, ha az $a_1 = a_{66}$ párral véget is ér a sorozat, $a_{67} = a_{68} = \ldots = a_{2013} = 0$. Innen egyszerű számolással $a_1 = a_2 = \ldots = a_{66} = \sqrt{\dfrac{61}{132}}$.

Megjegyzés: A geometriai megközelítés sikerét látva felbátorodhatunk, és kereshetünk megfelelő térbeli állítást. A fenti ötletek alkalmas módosításával oldható meg a 2. feladat.

Feladatok

1. 100 valós számra fennáll, hogy $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{99} \geq a_{100} \geq 0$, valamint, hogy $a_1^2 + a_2^2 \geq 100$, és $a_3^2 + a_4^2 + \ldots + a_{100}^2 \geq 100$. Mennyi $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{100}$ minimuma?
2. Bizonyítsuk be, hogy ha 2013 valós számra fennáll, hogy $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq$ $\geq a_{2012} \geq a_{2013} \geq 0$, valamint, hogy
$$a_{67}^3 + a_{68}^3 + \ldots + a_{2013}^3 \geq \frac{61}{891},$$
akkor
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2013} \geq \sqrt[3]{2013},$$
és egyenlőség akkor teljesül, ha $a_1 = a_2 = \ldots = a_{99} = \sqrt[3]{2013}/99$, továbbá $a_{100} = a_{101} = \ldots = a_{2013} = 0$.
3. A 2. megoldás utolsó lépése.
Legyen $m < 33$ pozitív egész, x és y pedig olyan valós számok, amelyekre $0 < y < x$. Bizonyítsuk be, hogy
$$mx^2 + y^2 \leq (m+1) \cdot \left(\frac{(33+m)x + y}{34+m}\right)^2.$$

Erben Péter, Pataki János