I. rész

1. *Péter a telefonján az egyik hónapban* 18 *hívást kezdeményezett és* 60 *percet beszélt hálózaton belül. Hálózaton kívül pedig* 11 *hívást kezdeményezett és* 45 *percet beszélt.* 10 db *SMS-t küldött.*

Hasonlítsuk össze, és számításokkal igazoljuk, hogy a megadott tarifacsomagok közül („Haver 1", „Haver 2") *melyik lett volna kedvezőbb számára az adott hónapban.*

Tarifacsomag neve	Haver1	Haver2
Lebeszélhető havidíj	1710 Ft 100%-ban hálózaton belül	3850 Ft 60%-ban hálózaton belül 40%-ban hálózaton kívül
Percdíj a havidíj felhasználásáig	38 Ft	35 Ft
Percdíj a havidíj felhasználása után	40 Ft	38 Ft
SMS küldés díja	40 Ft	38 Ft
Kapcsolási díj	3 Ft	3 Ft

A kapcsolási díj a havidíj-lebeszélhetőségbe nem számít bele, mindig a havidíjon felül kerül kiszámlázásra. (*11 pont*)

Megoldás. A „Haver 1" tarifacsomag esetén $1710 : 38 = 45$ perc beszélhető le hálózaton belül. Marad neki $60-45 = 15$ perc. Ezért a havidíjon felül fizetendő: $15 \cdot 40 = 600$ Ft. A hálózaton kívüli percekért fizetendő $45 \cdot 40 = 1800$ Ft, az SMS-ért $10 \cdot 40 = 400$ Ft. Kapcsolási díj: $(18+11) \cdot 3 = 87$ Ft. A költség összesen:

$$1710 + 600 + 1800 + 400 + 87 = 4597 \text{ Ft}.$$

A „Haver 2" tarifacsomag esetén mivel $3850 \cdot 0{,}6 = 2310$ és $2310 : 35 = 66$, azért 66 percet beszélhetne hálózaton belül. Ebből csak 60 percet beszélt le, ami 2310 Ft. Mivel $3850 \cdot 0{,}4 = 1540$ és $1540 : 35 = 44$, azért 44 percet beszélhet hálózaton kívül, de ő beszélt még 1 percet: $1540 + 38 = 1578$ Ft. Az SMS-ért $10 \cdot 38 = 380$ Ft-ot, a kapcsolási díjért $29 \cdot 3 = 87$ Ft-ot fizetett. Összes költség:

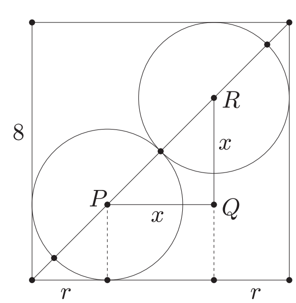
$$2310 + 1578 + 380 + 87 = 4355 \text{ Ft}.$$

Tehát a „Haver 2" kedvezőbb a számára, $4597 - 4355 = 242$ Ft-tal.

2. *Egy négyzet alapú hasáb alakú doboz alapéle* 8 cm. *A doboz négyzet alakú aljába éppen belefér két egyforma átmérőjű, körlapjával az alaplapon fekvő érem úgy, hogy az érmék a doboz 2-2 szomszédos oldallapját és egymást is érintik. Mekkora az érmék átmérője?* (*12 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Legyen $PR = 2r = d$; $PQ = QR = x$. A PQR egyenlő szárú derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel szerint:

$$(2r)^2 = x^2 + x^2, \quad \text{ebből} \quad x = \sqrt{2} \cdot r.$$



Mivel a négyzet oldala 8 cm, azért $2r + x = 8$, azaz $2r + \sqrt{2}r = 8$. Vagyis $r = \dfrac{8}{2+\sqrt{2}}$.

Tehát az érmék átmérője: $d = 2r \approx 4{,}7$ cm.

3. *Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $\cos 2x + 5 \cdot \sin x + 2 = 0$; (*7 pont*)

b) $2 \log_5 x - \dfrac{3}{\log_5 x} = 5$. (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Felhasználva, hogy $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ és $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, az egyenlet a következő másodfokú egyenletre vezet:

$$2 \cdot \sin^2 x - 5 \cdot \sin x - 3 = 0.$$

Ennek gyökei: $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ és $\sin x = 3$. Ez utóbbiból a szinusz függvény értékkészlete miatt nem adódik megoldás.

Az egyenlet megoldása:

$$x_1 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \quad x_2 = \frac{7\pi}{6} + l \cdot 2\pi, \quad \text{ahol} \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Ezek valóban megoldásai ez eredeti egyenletnek.

b) Az egyenlet mindkét oldalát $\log_5 x$-szel megszorozva és rendezve, az előzőhöz hasonló másodfokú egyenlethez jutunk:

$$2\log_5^2 x - 5\log_5 x - 3 = 0.$$

Ebből

$$\log_5 x_1 = -\frac{1}{2}, \qquad \text{amiből} \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\log_5 x_2 = 3, \qquad \text{amiből} \quad x_2 = 125.$$

Ezek a megoldások kielégítik az eredeti egyenletet.

4. *Egy* 10 *pontos tesztfeladatot harminc tanuló oldott meg. Az eredmény a következő lett:*

pontszám	3	4	5	6	7	8	9	10
gyakoriság	2	3	7	2	2	5	5	4

a) *A tanár gratulált az osztálynak, mert az egyik középértéknél a tanulók* $\dfrac{3}{5}$ *része több pontot ért el. Melyik középértékre gondolt a tanár?* *(6 pont)*

b) *Két tanuló később írta meg a tesztet. Az ő eredményüket is beleszámítva a medián* 0,5*-del; az átlag* 0,075*-del nőtt. Hány pontot érhettek el ők?* *(8 pont)*

Megoldás. *a*) A pontszámok átlaga:

$$(3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 4) : 30 = 204 : 30 = 6{,}8.$$

Ennél jobbat írt 16 fő. Mivel $\dfrac{16}{30} < \dfrac{3}{5}$, azért nem az átlagra gondolt.

A medián, azaz a 15. és 16. elem átlaga: $\dfrac{7+7}{2} = 7$. Ennél jobbat írt 14 fő. Mivel $\dfrac{14}{30} < \dfrac{3}{5}$, azért nem a mediánra gondolt.

A módusz, azaz a leggyakrabban előforduló elem: 5. Ennél jobbat írt 18 fő. Mivel $\dfrac{18}{30} = \dfrac{3}{5}$, azért a tanár a móduszra gondolt. *b*) A két tanuló pontszámát jelölje x és y. Az új átlag: $\dfrac{204 + x + y}{32} = 6{,}875$, ebből $x + y = 16$. A szóba jöhető felbontások: $16 = 6 + 10 = 7 + 9 = 8 + 8$. Ezek közül csak az $x = y = 8$ jöhet szóba, mert ekkor a medián 0,5-del nő; a másik két esetben a medián nem változik. Tehát a tesztet később megíró mindkét tanuló pontszáma 8.

Ez a megoldás valóban eleget tesz mindkét feltételnek.

II. rész

5. *A „Vigyáz(z)6” című játékban* 1*-től* 104*-ig számozott kártyák szerepelnek. A lapokon ökörfejek is találhatók a következő szabályok szerint:*

– *az* 55*-ös lapon* 7 db;
– *a többi* 5*-re végződő számot tartalmazó lapon* 2-2 db;
– *a többi azonos számjegyekből álló kétjegyű számot tartalmazó lapon* 5-5 db;
– *a* 0*-ra végződő számot tartalmazó lapokon* 3-3 db;
– *az összes többi lapon* 1-1 db *ökörfej található.*

A játék elején 4 *lapot felcsapnak, minden játékos* 10-10 *lapot kap, a többi lap pedig talonba kerül.*

a) *Hány ökörfej található a lapokon összesen?* *(4 pont)*

b) *Mennyi annak a valószínűsége, hogy a négy felcsapott lap mindegyikén egynél több ökörfej szerepel?* *(6 pont)*

c) *Hat játékos esetén mi a valószínűsége, hogy a talonban van legalább egy olyan lap, amelyen* 5 *vagy annál több ökörfej szerepel?* *(6 pont)*

Megoldás. a) A megadott intervallumon hét ökörfejet tartalmazó kártya: 55 (1 lap); két ökörfejet tartalmazó kártyák: 5, 15, 25, 35, 45, 65, 75, 85, 95 (9 lap); öt ökörfejet tartalmazó kártyák: 11, 22, 33, 44, 66, 77, 88, 99 (8 lap); három ökörfejet tartalmazó kártyák: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100 (10 lap).

Ez összesen 28 lap. A többi 76 lapon csak egy ökörfej található. Vagyis az ökörfejek száma összesen:

$$1 \cdot 7 + 9 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 10 \cdot 3 + 76 \cdot 1 = 171 \text{ db.}$$

b) A klasszikus valószínűségi mező esetén alkalmazható képlettel dolgozunk. Kedvező esetek száma $= \binom{28}{4}$, az összes esetek száma $= \binom{104}{4}$, vagyis

$$p = \frac{\binom{28}{4}}{\binom{104}{4}} \approx 0{,}00445$$

a valószínűsége annak, hogy a négy felcsapott lap mindegyikén egynél több ökörfej van. c) 5 vagy annál több (7) ökörfej $8 + 1 = 9$ db lapon szerepel; $104 - 9 = 95$ db lapon ennél kevesebb ökörfej van. Hat játékos esetén 40 db lap van a talonban.

Érdemes először a komplementer esemény valószínűségét meghatározni. Az eredeti eseményt A-val jelölve, $\overline{A} =$ {a talonban levő lapok között nincs olyan, amelyen 5 vagy annál több ökörfej szerepel}. Ebben az esetben is klasszikus valószínűségi mezőről van szó,

$$p(\overline{A}) = \frac{\binom{95}{40}}{\binom{104}{40}} \approx 0{,}01.$$

Tehát $p(A) = 1 - p(\overline{A}) \approx 0{,}99$ a valószínűsége annak, hogy hat játékos esetén van legalább egy olyan lap a talonban, amelyen 5 vagy annál több ökörfej szerepel.

6. *Egy üzemben henger alakú, egyliteres mérőedényeket gyártanak.*

Mekkora legyen a henger alapkörének sugara, illetve a henger magassága, hogy az anyagfelhasználás minimális legyen

a) fedetlen; (*8 pont*)

b) fedett mérőedény esetén? (*8 pont*)

A választ milliméter pontossággal adjuk meg.

Megoldás. a) A henger magassága legyen m; alapkörének sugara legyen r. A henger térfogata: $V = r^2\pi \cdot m = 1 \text{ dm}^3$, ezért $m = \dfrac{1}{r^2\pi}$ dm.

Az anyagfelhasználás akkor minimális, ha a henger felszíne minimális.

a) Fedetlen edény esetén a felszín: $A = r^2\pi + 2r\pi m$, $A(r) = r^2\pi + \dfrac{2}{r}$. Ennek a kifejezésnek akkor van minimuma, ha az első deriváltja 0 és a második deriváltja pozitív:

$$A'(r) = 2r\pi - \frac{2}{r^2} = 0 \quad \text{és} \quad A''(r) = 2\pi + \frac{4}{r^3} > 0.$$

Az elsőből

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}, \quad m = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}} \cdot \pi} = \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} \approx 0{,}68 \text{ dm.}$$

Ekkor $A''\Big(\sqrt[3]{\dfrac{1}{\pi}}\Big) > 0$.

Vagyis az anyagfelhasználás akkor minimális, ha $r = m \approx 0{,}68 \text{ dm} = 68 \text{ mm}$.

b) Fedett edény esetén a felszín:

$$A(r) = 2r^2\pi + 2r\pi m = 2r^2\pi + \frac{2}{r},$$
$$A'(r) = 4r\pi - \frac{2}{r^2} = 0 \quad \text{és} \quad A'' = 4\pi + \frac{4}{r^3} > 0.$$

Az elsőből $r = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2\pi}} \approx 0{,}54$ dm és $m = \sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}} \approx 1{,}08$ dm, ekkor $A''\Big(\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}\Big) > 0$.

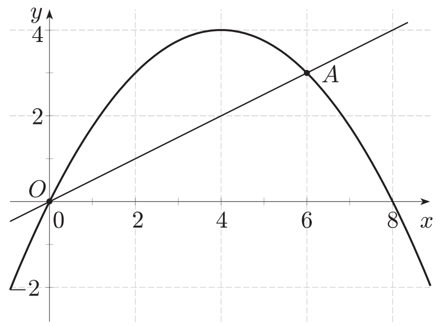
Vagyis az anyagfelhasználás akkor minimális, ha $r \approx 0{,}54 \text{ dm} = 54 \text{ mm}$; $m \approx 1{,}08 \text{ dm} = 108 \text{ mm}$.

7. *Az $y = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola áthalad a $(8; 0)$ ponton és az origón. Az origóba húzott érintőjének iránytangense 2.*

a) Határozzuk meg a, b és c értékét. (*6 pont*)

b) Az origón és a parabola 6 abszcisszájú pontján keresztül szelőt húzunk. Mekkora területet zár közre ez a szelő és a parabola? (*10 pont*)

Megoldás. a) Mivel a parabola áthalad a $(8;0)$ és a $(0;0)$ pontokon, felírhatjuk a következő egyenleteket: $0 = a\cdot 64 + b\cdot 8 + c$, $0 = a\cdot 0 + b\cdot 0 + c$. Ezekből kapjuk, hogy $c = 0$ és $a = -\frac{1}{8}b$.



Az origóba húzott érintő iránytangense a pontbeli első derivált:

$$f'(x) = 2ax + b, \quad f'(0) = 0 + b = 2.$$

Tehát $a = -\frac{1}{4}$; $b = 2$; $c = 0$.

b) Mivel $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$, azért $f(6) = 3$. Az origón és az $A(6;3)$ pontokon áthaladó szelő egyenlete: $y = \frac{1}{2}x$. A kérdéses terület:

$$\int\limits_0^6 \left(-\frac{1}{4}x^2 + 2x - \frac{1}{2}x\right)\,dx = \int\limits_0^6 \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x\right)\,dx = \left[-\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^6 = 9.$$

A parabola és a szelő által közrezárt terület 9 területegység.

8. a) *Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra $64 \mid 9^n - 8n - 1$.* (*8 pont*)
b) *Igaz-e, hogy $2013^2 + 2014 \mid 2013^{2014} - 2013$? Indokoljuk válaszunkat.* (*8 pont*)

Megoldás. a) Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 0$-ra: $64 \mid 0$; igaz; ($n = 1$-re: $64 \mid 0$; igaz; $n = 2$-re: $64 \mid 64$; igaz).

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz, vagyis $64 \mid 9^k - 8k - 1$. Be kell látnunk, hogy $n = k+1$-re is igaz, azaz $64 \mid 9^{k+1} - 8(k+1) - 1$. A kifejezést átalakíthatjuk a következő módon:

$$9\cdot 9^k - 8k - 9 = 9\cdot(9^k - 8k - 1) + 64k.$$

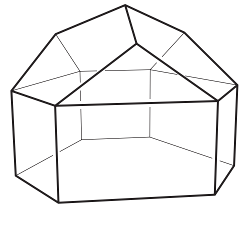
Az utóbbi kifejezés első tagja az indukciós feltevés miatt, a második tag nyilvánvalóan osztható 64-gyel, tehát az összeg is osztható 64-gyel. Ezzel az állítást igazoltuk.

b) Legyen $a = 2013$. Ekkor a baloldal így írható: $a^2 + a + 1$. A jobboldal:

$$a^{2014} - a = a\bigl(a^{2013} - 1\bigr) = a\Bigl[\bigl(a^3\bigr)^{671} - 1^{671}\Bigr] = a\bigl(a^3 - 1\bigr)\bigl(a^{670} + a^{669} + \ldots + a + 1\bigr).$$

Mivel $a^3 - 1 = (a-1)\bigl(a^2 + a + 1\bigr)$, azért az állítás igaz.

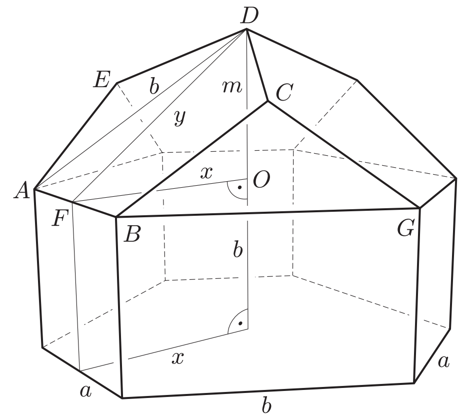
9. *Egy turisták pihenőjeként szolgáló építmény legfelső csúcsában három darab szabályos ötszög találkozik az* ábrán *látható módon.*



A szabályos ötszögek oldalai 1,5 m *hosszúak. Az építmény oldallapjai téglalapok, amelyeknek a talajra merőleges oldalai szintén* 1,5 m *hosszúak.*

a) *Milyen magas az építmény?* (*8 pont*)
b) *Mekkora az építmény alapterülete?* (*8 pont*)

Megoldás. *a*) Használjuk az *1. ábra* jelöléseit. A szöveg alapján $a = 1{,}5$ m. Az ábrán $AD = BG$, mert a tetőszerkezetet tekinthetjük egy szabályos dodekaéder részének, amelyhez a C csúcsnál egy újabb szabályos ötszög csatlakozna. Legyen $AD = BG = b$; $FO = x$; $FD = y$; $OD = m$.



1. ábra

Az ábrán b-vel jelölt szakaszok hossza megegyezik a szabályos ötszög átlójával. A szabályos ötszög egy szöge:

$$\alpha = \frac{3 \cdot 180}{5} = 108^\circ.$$

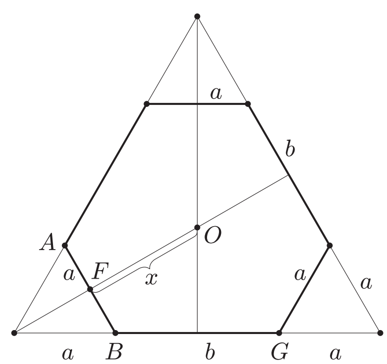
Ugyanekkora a $BCG\sphericalangle$ nagysága is.

A BGC háromszögben a koszinusz-tétel alapján: $b^2 = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos 108^\circ$, ebből $b \approx 2{,}43$ m. Az EAD háromszögben

$$EAD\sphericalangle = EDA\sphericalangle = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Az AFD háromszögben $DAF\sphericalangle = 108^\circ - EAD\sphericalangle = 72^\circ$, az 1. ábrán y-nal jelölt szakaszra felírható az AFD háromszögben: $\sin 72^\circ = \dfrac{y}{b}$. Ebből $y \approx 2{,}31$ m.

Az 1. ábrán x-szel jelölt szakasz kiszámításához tekintsük az alaplapot alkotó hatszöget. Ennek szemközti oldalai párhuzamosak és oldalainak hossza rendre: a, b, a, b, a, b, mert a megfelelő oldalak 120°-os elforgatottjai egymásnak az OD egyenes, mint térbeli forgástengely körül (ez a forgatás a szerkezetet és a dodekaédert is önmagába viszi). Ezért ez a hatszög kiegészíthető szabályos háromszöggé a *2. ábrán* látható módon.



2. ábra

Az ábra alapján az x-szel jelölt szakasz kiszámítható a $b + 2a$ oldalú szabályos háromszög súlyvonala kétharmad részének és az a oldalú szabályos háromszög magasságának különbségeként:

$$x = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(b + 2a) - \frac{\sqrt{3}}{2}a \approx 1{,}84 \text{ m}.$$

A DFO háromszögben a Pitagorasz-tételt felírva: $m = \sqrt{y^2 - x^2} \approx 1{,}40$ m. Az építmény magassága $M = a + m \approx 2{,}9$ m.

b) Az alapterületet kiszámolhatjuk úgy, hogy a $b + 2a$ oldalú szabályos háromszög területéből kivonjuk az a oldalú szabályos háromszög területének háromszorosát:

$$T = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (b + 2a)^2 - 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \approx 9{,}84 \text{ m}^2.$$

Tehát az építmény alapterülete: $9{,}84$ m^2.