Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Két konvex sokszög közül az elsőnek 540-nel több átlója van, mint a másodiknak, és az elsőnek háromszor annyi csúcsa van, mint a másodiknak. Hány csúcsuk van külön-külön? (*11 pont*)

2. A miskolci pályaudvar utasellátó büféjének ajtaján a következő tájékoztató szöveg olvasható:

Nyitva tartás 03.30–23.30.
Műszakátadás miatt 07.30–08.30 és 19.30–20.30 között zárva!

a) Mekkora eséllyel találjuk nyitva a büfét, ha reggel 7 és este 9 között véletlenszerűen érkezünk a bejáratához?

b) Egy vargabélest vásároltunk 200 Ft-ért. A pénzt pontosan kiszámolva adtuk át a pénztárosnak. Hányféleképpen tehettük ezt meg, ha 20 Ft-osnál kisebb címletet nem adtunk, és a sorrend nem számít?

c) Az utánunk következő vásárló három péksüteményt szeretne venni, a kínálat: diós búrkifli, ízes levél, túrós táska, meggyes rétes és kakaós csiga. Mekkora eséllyel találjuk el, hogy mit fog vásárolni, ha azt feltételezzük, hogy mindegyik választásának ugyanannyi az esélye? (*12 pont*)

3. Adott a koordinátarendszerben négy pont: $A_1(0;5)$, $B_1(1;7)$, $A_2(3;4)$, $B_2(5;5)$. Tudjuk, hogy A_1A_2 és B_1B_2 két koncentrikus kör egy-egy húrja.

a) Hol van a körök közös középpontja?

b) Tükrözzük az $A_1B_1A_2B_2$ töröttvonalat az első negyed szögfelezőjére, majd az eredeti és a képként kapott alakzatot tükrözzük mindkét tengelyre és az origóra is. Mekkora az így kapott sokszög kerülete, területe? (*14 pont*)

4. Az $1, 6, 13, 24, 37, 54, 73, 96, 121, \ldots$ sorozat kettőnél nagyobb sorszámú tagjait úgy kaptuk, hogy a nála kettővel kisebb sorszámú taghoz hozzáadtuk a közbülső tag sorszámának hatszorosát. Már tudjuk, hogy a páros helyen álló számok a sorszám másodfokú függvényeként állíthatók elő. Mennyi a sorozat századik tagja? (*14 pont*)

II. rész

5. Adott három egyenes az egyenletével:

$$a\colon x+3y=7, \quad b\colon 3x-y=-7, \quad c\colon 3x+4y=8.$$

a) Mutassuk meg, hogy a három egyenes derékszögű háromszöget határoz meg.

b) Milyen messze van a derékszögű csúcs a szemközti oldal felezőpontjától?

c) Mekkora a háromszög beírt körének sugara? (*16 pont*)

6. Adott egy függvény a hozzárendelési utasításával:

$$f(x)=\frac{\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}}{\dfrac{x-2}{x+2}+1}.$$

a) Adjuk meg azt a legbővebb halmazt, amely az $f(x)$ értelmezési tartománya lehet.

b) Adjuk meg $f(x)$ értékkészletét.

c) Hány rácspont illeszkedik $f(x)$ grafikonjára? Adjuk meg ezeket a pontokat.

(*16 pont*)

7. A Pontos lépés nevű játéknak László szabályos hatszög alaplapú egyenes hasáb alakú dobozt tervez. A doboz alaplapja az $ABCDEF$, fedőlapja pedig a $GHIJKL$ szabályos hatszög.

a) Mekkora lenne az $ABHG$ oldallap területe, ha az $ABIL$ metszet területe 72 cm^2-es?

b) Mekkora lenne az alaplap és az $ABIL$ sík hajlásszöge $AL=\sqrt{2}\cdot AB$ esetén?

(*16 pont*)

8. *a*) Az $f(x) = 4 - x^2$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjához az 1 és a -1 abszcisszájú pontjában húzott érintők, valamint az x tengely meghatároz egy háromszöget. A háromszöget a függvény görbéje mentén szétvágjuk. Mekkora a függvény görbéje mellett jobbra, balra és fönt keletkezett síkidomok területének összege?

b) Egy alagút keresztmetszetét jó közelítéssel az $f(x) = 4 - x^2$ hozzárendelésű függvény grafikonja és az x tengely adja. A koordinátarendszer egysége 1 méternek felel meg. Mekkora a maximális térfogata annak a 6 méter hosszú téglatestnek, amit egyik lapján csúsztatva át lehet tolni az alagúton? (*16 pont*)

9. Sík talajon az 5 méter magas, függőlegesen álló oszlop teteje a sík A pontjából 6,5°, a B pontjából pedig 5,6° emelkedési szögben látszik. Az oszlop tetejéről az AB távolság 80°-os látószög alatt látható.

a) Írjuk le röviden, hogy hogyan határoznánk meg az ABC háromszög területét (C az oszlop alja), ha az AB hosszát ismernénk.

b) Mekkora az AB távolság? (*16 pont*)