A 2012–2013. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai

I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Az n pozitív egész számnak pontosan két pozitív osztója van, az $n+1$-nek pedig pontosan három. Hány pozitív osztója van az $n+2012$ számnak?

2. Elhelyezhető-e a térben 11 pont úgy, hogy az általuk meghatározott egyenesek száma 53 legyen? Lehet-e a 11 pont által meghatározott egyenesek száma 54? Állítását indokolja!

3. Oldja meg a pozitív egész számokból álló számhármasok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$(a)\qquad x+y+z=12,$$
$$(b)\qquad xy+xz+yz=47.$$

4. A nem egyenlőszárú ABC háromszögben $BC>CA$. Az AB oldal F felezőpontján keresztül húzzunk párhuzamost a C pontbeli belső szögfelezővel, ez az egyenes az AC egyenest a P, a BC egyenest a Q pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{BC}{AC}-\frac{PQ}{QF}=1!$$

5. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\frac{\sqrt{2012-503x}-|3x-2|}{\sqrt{2x+12}-|3x-2|}\leq 1$$

egyenlőtlenséget!

6. Az x ésy pozitív valós számok szorzata 50, továbbá teljesül, hogy $x>y$. Határozza meg az $\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ kifejezés minimumának értékét!

Adja meg az $\dfrac{x}{y}$ aránynak azt az értékét, amelyre a kifejezés a minimumát valóban felveszi!

Második forduló

1. Mely valós x; y számpárokra teljesül a

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}=28-4\cdot\sqrt{x-2}-\sqrt{y-1}$$

egyenlőség?

2. Mutassa meg, hogy ha az

$$A=224\underbrace{99\ldots9}_{k-2\text{ db }9}1\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ db }0}9\qquad(k\in\mathbb{N},\ k\geq 2)$$

tízes számrendszerbeli pozitív egész szám, akkor a $B=\sqrt{A}+3$ szám pozitív egész. Bizonyítsa be, hogy ez a B szám csak a 2; 3; 5 prímszámokkal osztható!

3. Legyen az ABC háromszögben a BC oldal felezőpontja F, legyen továbbá $BCA\sphericalangle=15^\circ$ és $BFA\sphericalangle=45^\circ$. Határozza meg a $CAB\sphericalangle$ nagyságát!

4. Meg lehet-e számozni egy kocka csúcsait az $1,2,\ldots,7,8$ számokkal úgy, hogy minden csúcshoz különböző szám tartozzon, és bármelyik él két végpontjára írt számok összege is egymástól különböző legyen?

5. Bizonyítsa be, hogy ha α hegyesszög, akkor

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\geq 3+2\cdot\sqrt{2}!$$

Mikor áll fenn egyenlőség?

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy papírlapra felírtuk a pozitív egész számokat n-től $2n$-ig. Azt vettük észre, hogy a felírt páros számok összege 2013-mal nagyobb, mint a felírt páratlan számok összege. Mettől meddig írtuk fel a számokat?

2. Oldja meg a valós számpárok halmazán a

$$\log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right) = 1,$$

és

$$58^{x\cdot y^3} - 31^{x\cdot y^3} = 3^{x+y^3}$$

egyenletekből álló egyenletrendszert!

3. Az ABC háromszög egyik szöge $120°$-os. Bizonyítsa be, hogy a belső szögfelezőknek a szemben levő oldalakkal való metszéspontjai derékszögű háromszöget határoznak meg!

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Mely x és y valós számok elégítik ki a $\sqrt{x} = 2 - y$, $\sqrt{y} = x - 2$ egyenletrendszert?

2. Egy négyzetet az egyik csúcsából induló két egyenes három egyenlő területű részre oszt.

(a) Milyen arányú részekre osztja a két egyenes négyzetbe eső szakaszát a szakaszokat metsző átló?

(b) Legyen a négyzetbe írt kör területe T, a két egyenes és az őket metsző átló által bezárt háromszög beírt körének területe t. Határozzuk meg $T : t$ értékét.

3. Hányféleképpen juthatunk a koordinátarendszer origójából a $(4; 2)$ pontba, ha 10 lépést teszünk, minden lépésünk egységnyi hosszú és párhuzamos a tengelyek valamelyikével?

4. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén teljesül az alábbi egyenlőtlenség:

$$\frac{\sqrt{6}}{5} + \frac{\sqrt{20}}{9} + \frac{\sqrt{42}}{13} + \ldots + \frac{\sqrt{2n(2n+1)}}{4n+1} < \frac{n}{2}.$$

5. Igazoljuk, hogy a rekurzióval definiált alábbi sorozat minden tagja pozitív egész szám:

$$c_1 = 1, \quad c_{n+1} = \frac{4n-2}{n+1} \cdot c_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Második forduló

1. Bizonyítsuk be, ha egy pozitív egész szám első és utolsó jegyének különbsége 5, akkor e szám és jegyeinek fordított sorrendjével felírt szám különbsége osztható 45-tel.

2. Egy 10 egység oldalú szabályos háromszöget az oldalaival párhuzamos egyenesekkel egységnyi oldalú szabályos háromszögekre bontottunk fel. Hány olyan szabályos háromszög van, amelynek csúcsai a létrejött szabályos háromszög-rács rácspontjai?

3. Az ABC háromszög AB, BC és CA oldalain adottak rendre a P, Q és R pontok. Igazoljuk, hogy az APR, BPQ és CQR háromszögek köré írt körei középpontjai által meghatározott háromszög hasonló az ABC háromszöghöz.

4. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{2012 + \sqrt{2011 + \sqrt{2010 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}} < 46.$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Az f függvény értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza és a függvény értékei is pozitív egészek. Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amelyre teljesül, hogy minden pozitív egész n szám esetén

$$\sum_{i=1}^{n} f^3(i) = f^3(1) + f^3(2) + \ldots + f^3(n) = \big(f(1) + f(2) + \ldots + f(n)\big)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} f(i)\right)^2.$$

Itt a szokásos jelölés szerint $f^3(k) = \big(f(k)\big)^3$, azaz az f függvény k helyen felvett értékének köbe.

2. Az ABC háromszög CA, AB és BC oldalainak belső pontjai rendre B_1, C_1 és A_1, amelyekre

$$\frac{CB_1}{CA} = \frac{AC_1}{AB} = \frac{BA_1}{BC} = \lambda < \frac{1}{2}.$$

Az AA_1 és BB_1 szakaszok metszéspontja P, BB_1 és CC_1 metszéspontja Q és CC_1 és AA_1 metszéspontja R.
Ha az ABC háromszög területe T, a PQR háromszög területe t, akkor $T : t = 13 : 4$ esetén mekkora λ értéke?

3. Egy táncesten n lány és 4 fiú vett részt. Páros táncokat táncoltak, egy párban mindig egy fiú és egy lány volt, de a táncpartnerek cserélődhettek. Legalább mekkora az n, ha a táncolás után kiválasztható vagy két lány és két fiú úgy, hogy a köztük lehetséges összes párosításban táncoltak az est folyamán, vagy úgy, hogy egymással semelyik párosításban sem táncoltak?

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Az ABC egyenlő szárú háromszög AB alapján vegyünk fel egy P pontot. P-ből merőlegeseket állítunk a két szár egyenesére, ezek talppontjai I, illetve J. A háromszög magasságpontját jelölje M. Mutassuk meg, hogy a PM egyenes áthalad az IJ szakasz felezőpontján.

2. Legyenek $1 \leq k \leq n$ rögzített egészek. Mennyi az

$$x_1 x_2 \ldots x_k + x_2 x_3 \ldots x_{k+1} + \ldots + x_{n-k+1} x_{n-k+2} \ldots x_n$$

kifejezés maximuma, ha $x_1, \ldots, x_n$ nemnegatív számok és összegük 1?

3. Rögzítsünk a síkon egy AB szakaszt és annak egy P belső pontját. Ha ABC tetszőleges háromszög, húzzunk P-ből párhuzamost az AC, illetve BC oldalakkal. Ezek az egyenesek a BC oldalt a Q pontban, az AC oldalt az R pontban metszik. Az APR és BPQ háromszögek köré írt körök P-től különböző metszéspontja legyen H. Mi a H pontok halmaza, ha a C pont a sík minden, az AB egyenesre nem illeszkedő pontján végigfut?

4. Hány olyan, nem 0-ra végződő többszöröse van a 2012-nek, amelyben a számjegyek összege 5?

5. Van 2012 külsőre teljesen egyforma, de páronként különböző értékű érménk. Ugyancsak van egy készülékünk, amelybe 21 érmét kell behelyezni, és megadja, hogy a 21 behelyezett érme közül melyik a k-adik legértékesebb. Ennek a készüléknek a segítségével a 2012 érme közül hánynak tudjuk meghatározni az érték szerinti sorszámát, ha *a*) $k = 10$, illetve ha *b*) $k = 11$?

Második (döntő) forduló

1. Adott a síkon három különböző kör, k, k_1 és k_2. Középpontjaik és sugaraik legyenek rendre O, O_1, O_2, r, r_1 és r_2. Tegyük fel, hogy k belülről érinti k_1-et az E_1 pontban, k_2 belülről érinti k-t az $E_2 \neq E_1$ pontban, továbbá hogy az O_1O_2 egyenes merőleges az E_1E_2 egyenesre. Fejezzük ki az r sugarat r_1-gyel és r_2-vel.

2. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)k}{m^{k+1}} = 1.$$

3. Tekintsük azokat az n hosszúságú sorozatokat, amelyek mindegyik eleme 0 vagy 1. Két ilyen sorozat összegén a tagonként modulo 2 végzett összeadás eredményét értjük. Mely pozitív egész n számokra állíthatók párba ezek a sorozatok úgy, hogy a párok két tagját rendre összeadva 2^{n-1} különböző sorozatot kapjunk?