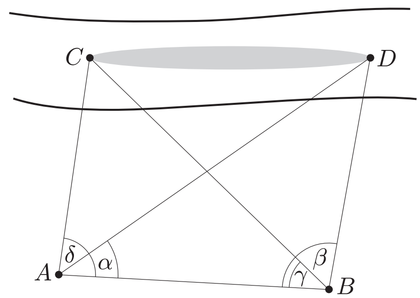
I. rész

1. ***1.*** *Egy térképész azt a feladatot kapta, hogy az* ábrán *látható folyó közepe táján található, hosszúkás sziget CD hosszára adjon egy viszonylag elfogadható becslést. A folyó gyors sodrású és örvényes, ezért a térképész nem kelt át a szigetre, hanem máshogy oldotta meg a feladatot. A parti síkságon kijelölte egymástól* 100 *méterre az A és B pontokat az* ábra *szerint, azután lemérte az $\alpha = 38°$, $\delta = 85°$, $\beta = 97°$ és $\gamma = 41°$ szögek fokra kerekített értékét, majd kiszámolta a sziget közelítő hosszát. Számoljuk ki mi is.* (*12 pont*)



Megoldás. Az ABC háromszögben a C csúcsnál lévő szög: $180° - 41° - 85° = 54°$. A szinusztételt felírva kapjuk:

$$\frac{\sin 54°}{100} = \frac{\sin 41°}{AC},$$

ebből AC-re megközelítőleg 81,09 m adódik.

Az ABD háromszögben a D csúcsnál lévő szög: $180° - 38° - 97° = 45°$. A szinusztételt felírva kapjuk:

$$\frac{\sin 45°}{100} = \frac{\sin 97°}{AD},$$

ebből AD megközelítőleg 140,37 m hosszú.

Az ACD háromszögre felírjuk a koszinusztételt:

$$CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AD \cdot \cos(\delta - \alpha),$$

ebből CD megközelítőleg 104 m.

2. *a*) *Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását, és adjuk meg, hogy a megfordítás igaz-e vagy hamis:*

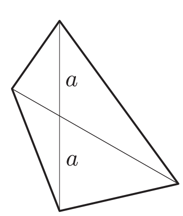
Ha egy négyszög deltoid, akkor valamelyik átlóját a másik átlója felezi.

b) *Tagadjuk a következő mondatot:*

Amelyik kutya ugat, az nem harap.

c) *Anett, Béla és Cecília nagyon jó barátok. Zongoraművész, tanító és mérnök a hivatásuk, de nem feltétlenül ebben a sorrendben. Egyikük budapesti, a másik debreceni, a harmadik pedig szombathelyi lakos. Béla és Cecília a következő nyári szünetben Szombathelyre szeretnének utazni, hogy meglátogassák Anettet, aki egyedül él ott nagy kertes házában, és nála szeretnék a nyári szabadságot eltölteni. A zongoraművész megígérte, hogy ekkor Bélának ad egyet legújabb műsoros CD-jéből. A mérnök, aki nem budapesti, szeret sakkozni a debreceni zongoraművésszel, remélhetőleg erre is alkalom nyílik a szabadság alatt. Ki hol lakik és mi a foglalkozása?* (*12 pont*)

Megoldás. *a*) Az állítás megfordítása: Ha egy négyszög valamely átlóját felezi a másik, akkor a négyszög deltoid. A megfordítás hamis, ez egy ellenpéldával igazolható.



b) Az állítás tagadása: Van legalább egy olyan kutya, amelyik ugat és harap is.

Megjegyzés. Amelyik kutya ugat, az nem harap. Ezt az univerzális kvantor segítségével átfogalmazva: Minden egyes kutya, amelyre igaz, hogy ugat, az nem harap. Ennek tagadása az egzisztenciális kvantor segítségével történik: Létezik olyan kutya, amelyre igaz, hogy ugat és harap. Ezt visszafordítva a mindennapi nyelvre: Van olyan kutya, amely ugat is és harap is.

c) Mivel Anettnek Szombathelyen van családi háza, azért ő a szombathelyi. Mivel a debreceni zongoraművész Bélának ad műsoros CD-t, azért Béla nem debreceni, ezért csak ő lehet a budapesti. Ez azt jelenti, hogy a debreceni zongoraművész csak Cecília lehet. És mivel a mérnők nem budapesti, azért a mérnök csak Anett lehet, ami pedig azt vonja maga után, hogy Béla a tanító.

Összefoglalva:

Anett	szombathelyi	mérnök
Béla	budapesti	tanító
Cecília	debreceni	zongoraművész

3. *a*) *Melyik az a szám, melyet tízes alapú logaritmusára emelve négyzetének százmilliószorosát kapjuk?*

b) *Egymillió forintot kötünk le egy bankban évi 2,5%-os kamatra. A kamatot az év utolsó napján írják hozzá a tőkéhez, miután levonták belőle a 16%-os kamatadót és 6%-os egészségügyi hozzájárulást (ami szintén a kamatot terheli). Hányadik év végén lépi túl lekötésünk az 1,2 millió forintot?* (*13 pont*)

Megoldás. *a*) A feladat szövege alapján a következő egyenlet írható fel:

$$x^{\lg x} = 10^8 x^2.$$

Mivel a logaritmusfüggvény csak pozitív számokra van értelmezve, azért az $x > 0$ kikötést kell tenni.

Mindkét oldal pozitív, és a logaritmus függvény kölcsönösen egyértelmű, ezért vehetjük a tízes alapú logaritmusukat:

$$\lg x^{\lg x} = \lg\left(10^8 \cdot x^2\right),$$
$$\lg x \cdot \lg x = \lg 10^8 + \lg x^2,$$
$$(\lg x)^2 - 2\lg x - 8 = 0.$$

$\lg x$ helyett új ismeretlent bevezetve:

$$A^2 - 2A - 8 = 0.$$

A megoldóképletet alkalmazva: $A_1 = 4$, $A_2 = -2$, amiből $x_1 = 10\,000$, $x_2 = 0{,}01$.

b) A befektető úgy érzékeli, hogy kamatjóváíráskor nem a tőke 2,5%-ával, hanem ennek 0,78 részével, vagyis 1,95%-kal növelik a tőkéjét.

A kamatos kamat számításának képlete $\left(T_n = T_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n\right)$ alapján felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget, ahol keressük n értékét:

$$1\,200\,000 < 1\,000\,000\left(1 + \frac{1{,}95}{100}\right)^n.$$

Mindkét oldalt osztva egymillióval és a tízes alapú logaritmusukat véve:

$$\lg 1{,}2 < \lg 1{,}0195^n,$$
$$\lg 1{,}2 < n \cdot \lg 1{,}0195^n,$$
$$\frac{\lg 1{,}2}{\lg 1{,}0195} < n.$$

Mivel $\frac{\lg 1{,}2}{\lg 1{,}0195} \approx 9{,}44$, azért a tizedik év végén lépi túl tőkénk az 1,2 millió forintot.

4. *Tekintsük a hozzárendelési szabályával megadott következő függvényt:*

$$f\colon x \to \begin{cases} \dfrac{12}{x}, & ha\ \ x < -3, \\ \left|x^2 - 4\right|, & ha\ \ -3 \le x < 3, \\ -\dfrac{12}{x}, & ha\ \ x \ge 3. \end{cases}$$

a) *Ábrázoljuk a függvényt a* $[-12; 12]$ *intervallumon.*

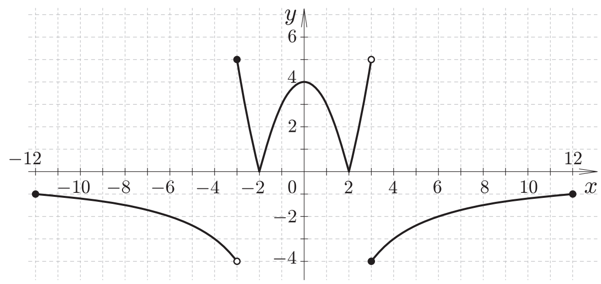
b) *Adjuk meg a függvény zérushelyeit.*

c) *Adjuk meg a függvény értékkészletét.*

d) *Adjuk meg a függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit, továbbá a lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit is.*

e) *Páros függvény-e az f függvény?* (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Lásd az *ábrát.*



b) A függvény zérushelyei: $x_1 = -2$ és $x_2 = 2$. Mivel az x tengely mindkét irányban a függvény aszimptotájaként viselkedik, azért további zérushely nincs.

c) A függvény értékkészlete: $R_f = [-4; 5]$ (Vigyázzunk: nem az ábrázolt rész értékkészlete volt a kérdés.)

d) A függvény maximum helye: -3, maximum értéke: 5. A függvény minimum helye: 3, minimum értéke: -4. A függvény lokális maximum helye: 0, lokális maximum értéke: 4. A függvény lokális minimum helyei: -2 és 2, lokális minimum értéke: 0.

e) Mivel az $x = -3$ és $x = 3$ helyen különböző értékeket vesz fel, azért nem lehet páros függvény.

II. rész

5. *Adott egy dobótetraéder (olyan szabályos és homogén tömegeloszlású tetraéder, melynek lapjaira* 1, 2, 3 *és* 4 *van írva) és egy dobóoktaéder (olyan szabályos és homogén tömegeloszlású oktaéder, melynek lapjaira* 1*-től* 8*-ig vannak felírva a természetes számok). Dobjunk egyszerre a dobótetraéderrel és a dobóoktaéderrel. Legyen egy kísérlet kimenetele azoknak a számoknak az összege, amelyek az asztallal érintkező lapokra vannak felírva.*

a) Ábrázoljuk az így definiált valószínűségi változó eloszlását oszlopdiagramon, illetve számoljuk ki a várható értéket.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobóoktaéder asztallal érintkező lapján nagyobb szám lesz, mint a dobótetraéder asztallal érintkező lapján?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kimenetel a nyolcadik alkalommal lesz először 9*, ha a kísérletet sokszor elvégezzük egymás után?*

d) Elvégeztük a kísérletet százszor. A kimeneteleket feljegyezve az alábbi gyakorisági táblázatot kaptuk. Melyik kimenetel esetén a legnagyobb a relatív gyakoriság és a három tizedesre kerekített elméleti valószínűség abszolút eltérése?

kimenetel	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
gyakoriság	0	6	10	13	15	8	16	14	11	5	2

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) A lehetséges dobáspárok:

1; 1	2; 1	3; 1	4; 1	5; 1	6; 1	7; 1	8; 1
1; 2	2; 2	3; 2	4; 2	5; 2	6; 2	7; 2	8; 2
1; 3	2; 3	3; 3	4; 3	5; 3	6; 3	7; 3	8; 3
1; 4	2; 4	3; 4	4; 4	5; 4	6; 4	7; 4	8; 4

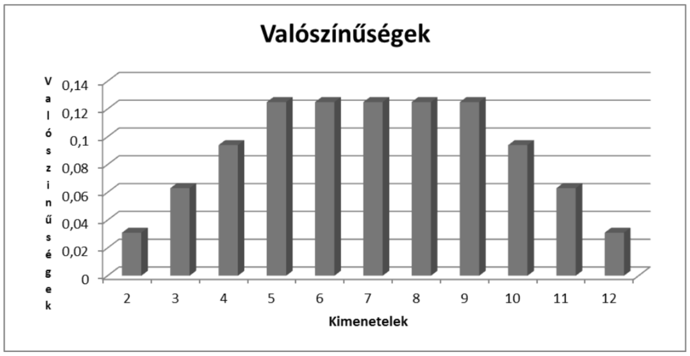
Mivel minden egyes dobáspárnak azonos a valószínűsége, azért a lehetséges kimenetelek valószínűségei:

kimenetel	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
valószínűség	$\frac{1}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{4}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{2}{32}$	$\frac{1}{32}$
a valószínűség három tizedesre kerekítve	0,031	0,063	0,094	0,125	0,125	0,125	0,125	0,125	0,094	0,063	0,031

A várható érték:

$$2 \cdot \frac{1}{32} + 3 \cdot \frac{2}{32} + 4 \cdot \frac{3}{32} + 5 \cdot \frac{4}{32} + 6 \cdot \frac{4}{32} + 7 \cdot \frac{4}{32} + 8 \cdot \frac{4}{32} + 9 \cdot \frac{4}{32} + 10 \cdot \frac{3}{32} + 11 \cdot \frac{2}{32} + 12 \cdot \frac{1}{32} = 7.$$

A valószínűségi változó eloszlását szemléltető oszlopdiagram:



b) A lehetséges dobáspárok táblázata segítségével egyszerű összeszámlálás alapján:

$$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} = \frac{22}{32}.$$

c) Az eddigiekből tudjuk, hogy:

$$P(\text{a dobások összege } 9) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}.$$

Ebből adódóan

$$P(\text{a dobások összege nem } 9) = 1 - \frac{4}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}.$$

Mivel az egymást követő kísérletek függetlenek egymástól, azért a keresett valószínűség:

$$P = \left(\frac{7}{8}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) \approx 0{,}049.$$

d) A relatív gyakoriságokat a következő táblázat mutatja:

kimenetel	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
gyakoriság	0	6	10	13	15	8	16	14	11	5	2
relatív gyakoriság	0	0,06	0,1	0,13	0,15	0,08	0,16	0,14	0,11	0,05	0.02

A relatív gyakoriságokat összehasonlítva az elméleti valószínűségek megfelelő három tizedes jegyre kerekített értékeivel, a legnagyobb abszolút eltérés akkor adódik, ha a kimenetel: 7.

6. *a*) *Két pozitív egész szám köbének különbsége* 169*. Melyek ezek a számok?*

b) *Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív természetes szám ötödik hatványából kivonjuk magát a számot, a különbség minden esetben osztható lesz a három legkisebb pozitív prímszámmal.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az $x^3 - y^3 = 169$ egyenlet pozitív egész x, y megoldásait keressük. Az egyenlet átírható $(x - y)\big(x^2 + xy + y^2\big) = 169$ alakba. Ha $x - y$ negatív, akkor nincs megoldás. Mivel a 169 prímtényezős felbontása 13^2, azért a következő esetek lehetségesek:

I. eset: az $x - y = 1$, $x^2 + xy + y^2 = 169$ egyenletrendszert megoldva $x_1 = 8$ és $y_1 = 7$, valamint $x_2 = -7$ és $y_2 = -8$. Utóbbi értékpár nem felel meg a feladat feltételeinek.

II. eset: az $x - y = 13$, $x^2 + xy + y^2 = 13$ egyenletrendszernek nincs megoldása a valós számok körében.

III. eset: az $x - y = 169$, $x^2 + xy + y^2 = 1$ egyenletrendszernek sincs megoldása a valós számok körében.

A keresett két szám a 8 és a 7.

b) Be kell látni a következőket: (1) $2 \mid n^5 - n$; (2) $3 \mid n^5 - n$; (3) $5 \mid n^5 - n$, ahol n pozitív természetes szám.

$$n^5 - n = n \cdot \big(n^4 - 1\big) = n \cdot \big(n^2 - 1\big) \cdot \big(n^2 + 1\big) = n \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot \big(n^2 + 1\big).$$

Mivel n vagy $n - 1$ osztható 2-vel, azért az (1) állítást beláttuk. Mivel $n - 1$ vagy n vagy $n + 1$ osztható 3-mal, azért a (2) állítást beláttuk.

A (3) állítás bizonyítása: Ha n osztható 5-tel, akkor

$$n \cdot (n-1) \cdot (n+1) \cdot \big(n^2 + 1\big) \tag{4}$$

is osztható 5-tel.

Ha n 5-tel osztva 1 maradékot ad, akkor $n - 1$ osztható 5-tel, tehát a (4) szorzat is.

Ha n 5-tel osztva 4 maradékot ad, akkor $n + 1$ osztható 5-tel, tehát a (4) szorzat is.

Ha n 5-tel osztva 2 maradékot ad, tehát a (4) szorzat (n^2+1) tényezője lesz osztható 5-tel. Ugyanis: $n = 5k+2$, ahol k nemnegatív egész, akkor

$$(n^2+1) = (5k+2)^2+1 = 25k^2+20k+4+1 = 25k^2+20k+5,$$

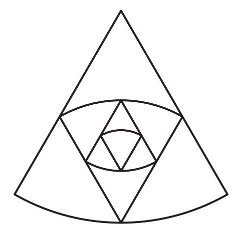
ami osztható 5-tel.

Ha n 5-tel osztva 3 maradékot ad, akkor a (4) szorzatnak megint az (n^2+1) tényezője lesz osztható 5-tel. Ugyanis: $n = 5k+3$, ahol k nemnegatív egész, akkor

$$(n^2+1) = (5k+3)^2+1 = 25k^2+30k+9+1 = 25k^2+30k+10,$$

ami szintén osztható 5-tel.

7. *Az* 1000 *méter sugarú* 60 *fokos középponti szögű körcikkbe a képen látható módon újabb hozzá hasonló körcikkeket rajzolunk, és ezt a „végtelenségig" folytatjuk.*



a) Mennyi a 12*. beírt (vagyis a* 13*. lerajzolt) körcikk területe és kerülete?*

b) Tekintsük a körcikkek kerületeinek olyan sorozatát, melynek első eleme az 1000 *méter sugarú körcikk, és számítsuk ki az első* 13 *elem összegét.*

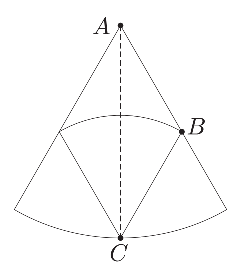
c) Tekintsük a körcikkek területeinek olyan sorozatát, melynek első eleme az 1000 *méter sugarú körcikk területe, és a további körcikkeket a fent leírt módon kapjuk. Jelölje ezeket a területeket T_1, T_2 stb. Mennyi S_n, ha $n \to \infty$?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az ABC háromszög egyenlő szárú, hiszen az A csúcsnál és a C csúcsnál is 30 fokos szög található. Az AC szakaszt jelöljük r_1-gyel, a BC szakaszt pedig r_2-vel. Az ABC háromszögre felírva a koszinusztételt:

$$r_1^2 = r_2^2 + r_2^2 - 2r_2^2\cos 120°, \quad \text{amiből} \quad r_2 = \frac{r_1}{\sqrt{3}}.$$

Ezzel beláttuk, hogy minden egyes újabb beírt körcikk sugarát úgy kapjuk, hogy az előző körcikk sugarát osztjuk $\sqrt{3}$-mal. Az egymást követő körcikkek sugarai méterben mérve tehát mértani sorozatot alkotnak, melynek első eleme $r_1 = 1000$ és hányadosa $q = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$$r_{13} = r_1 \cdot q^{12} = 1000 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12} = \frac{1000}{3^6} = \frac{1000}{729}.$$



A 13. lerajzolt körcikk területe:

$$T = \frac{r_{13}^2 \cdot \pi}{6} = \frac{\left(\frac{1000}{729}\right)^2 \cdot \pi}{6} = \frac{1\,000\,000 \cdot \pi}{531\,441 \cdot 6} \approx 0{,}3136 \cdot \pi \approx 0{,}9852 \ (\mathrm{m}^2).$$

A 13. lerajzolt körcikk kerülete:

$$K = 2 \cdot r_{13} + \frac{2 \cdot r_{13} \cdot \pi}{6} = 2 \cdot r_{13} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot 1000 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{12} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{6}\right) \approx 4{,}18 \ (\mathrm{m}).$$

b) Az n-edik körcikk kerülete:

$$K_n = 2 \cdot r_n + \frac{2 \cdot r_n \cdot \pi}{6} = 2 \cdot r_n \cdot \left(1 + \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot r_1 \cdot q^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{6}\right),$$

vagyis a körcikkek kerületei is mértani sorozatot alkotnak.

A kerületsorozat első 13 elemének összege:

$$S_{13} = a_1 \cdot \frac{q^{13} - 1}{q - 1} = 2 \cdot 1000 \cdot \left(1 + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{13} - 1}{\frac{1}{\sqrt{3}} - 1} \approx 7204{,}0369 \text{ (m)}.$$

c) Az n-edik körcikk területe:

$$T_n = \frac{r_n^2 \cdot \pi}{6} = \frac{\left[r_1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n-1}\right]^2 \cdot \pi}{6} = \frac{r_1^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \pi}{6}.$$

Tehát a területek egy olyan mértani sorozatot alkotnak, melynek első eleme: $T_1 = \frac{1000^2 \cdot \pi}{6}$, hányadosa: $\frac{1}{3} < 1$. A $\lim\limits_{S_n \to \infty} = \frac{a_1}{1 - q}$ képlet alapján:

$$\lim_{S_n \to \infty} = \frac{\frac{1000^2 \cdot \pi}{6}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1000^2 \cdot \pi}{6} \cdot \frac{3}{2} = 500^2 \cdot \pi.$$

Tehát a végtelen sok terület összege: $500^2 \cdot \pi \ (\mathrm{m}^2)$.

8. *Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(2;5)$, $B(7;-7)$, $C(-4;-3)$. Az A csúcson áthaladó belső szögfelező D pontban metszi a BC oldalt.*

a) *Írjuk fel az A csúcson áthaladó belső szögfelező egyenes egyenletét.*

b) *Adjuk meg az $\overrightarrow{AD}$ vektor koordinátáit és abszolútértékét.*

c) *Határozzuk meg az $\overrightarrow{AD}$ vektor és a $\overrightarrow{BC}$ vektor hajlásszögét.*

d) *Létezhet-e olyan ABC háromszög, amelynek az A csúcson áthaladó belső szögfelezőjének háromszögön belüli szakasza hosszabb, mint az AB oldal? Ha igen, akkor mi ennek a feltétele a háromszög szögeivel kifejezve?* (*16 pont*)

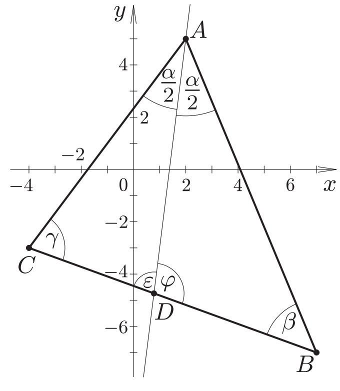
Megoldás. *a*) Az A csúcson áthaladó belső szögfelező egyenes egy irányvektora az $\overrightarrow{AB}$ irányú egységvektor és az $\overrightarrow{AC}$ irányú egységvektor összege.

$$\overrightarrow{AB}(5;-12), \qquad |\overrightarrow{AB}| = 13, \qquad e_{\overrightarrow{AB}}\left(\frac{5}{13}; \frac{-12}{13}\right),$$

$$\overrightarrow{AC}(-6;-8), \qquad |\overrightarrow{AC}| = 10, \qquad e_{\overrightarrow{AC}}\left(\frac{-6}{10}; \frac{-8}{10}\right).$$

$\mathbf{v}_{f1}\left(\frac{-28}{130}; \frac{-224}{130}\right)$, ezzel párhuzamos vektor a $\mathbf{v}_{f2}(-1;-8)$, az A-n áthaladó belső szögfelező egyenes egy normálvektora $\mathbf{n}(8;-1)$, egyenlete

$$8x - y = 11. \tag{1}$$



b) A D pont az A-n áthaladó belső szögfelező egyenes és a BC egyenesének metszéspontja. A BC egyenes egy irányvektora: $\mathbf{v}_{BC} = \overrightarrow{BC}(-11;4)$, ebből adódóan egy normálvektora $\mathbf{n}_{BC}(4;11)$, egyenlete pedig

$$4x + 11y = -49. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása: $x = \dfrac{18}{23}$, $y = -\dfrac{109}{23}$. Tehát

$$D\left(\frac{18}{23};-\frac{109}{23}\right),\quad \overrightarrow{AD}\left(\frac{18}{23}-2;-\frac{109}{23}-5\right) = \left(-\frac{28}{23};-\frac{224}{23}\right),$$
$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\left(-\frac{28}{23}\right)^2 + \left(-\frac{224}{23}\right)^2} = \frac{\sqrt{50\,960}}{23}.$$

c) $\overrightarrow{AD}\left(-\dfrac{28}{23};-\dfrac{224}{23}\right)$, $\overrightarrow{BC}(-11;4)$, hajlásszögük a következő képlet alapján számolható:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{BC}|},$$

vagyis

$$\cos\varphi = \frac{\left(-\frac{28}{23}\right)\cdot(-11) + \left(-\frac{224}{23}\right)\cdot 4}{\frac{\sqrt{50\,960}}{23}\cdot\sqrt{137}} \approx -0{,}2225, \quad \text{ebből} \quad \varphi \approx 102{,}86°.$$

d) Létezik ilyen háromszög, például $\alpha = 80°$; $\beta = 75°$; $\gamma = 25°$. Ez esetben ábránk alapján $\varepsilon = 65°$. Az ABD háromszöget vizsgálva tudjuk, hogy AD ekkor nagyobb, mint AB, hiszen a háromszögben nagyobb szöggel szemben nagyobb oldal van.

A feladat feltétele szerint $AD > AB$. Ez ekvivalens a $\beta > \varepsilon$ állítással, ami pedig egyenértékű a $\beta > 180° - \beta - \dfrac{\alpha}{2}$ egyenlőtlenséggel. További ekvivalens átalakításokkal a $\beta > 90° - \dfrac{\alpha}{4}$ feltételhez juthatunk.

9. *Egy 30 fős osztály tanulói közül 11 fiú és 8 lány játszik valamilyen hangszeren. 9 fiú és 14 lány versenyszerűen sportol, valamint 13 fiúról mondható el, hogy jár matematika szakkörre. A lányok közül hárman egyáltalán nem sportolnak semmit, de járnak matematika szakkörre.*

a) Hány fiú és hány lány van az osztályban?

b) A hangszeren játszó 8 lány közül, mindegyikük pontosan három másikkal jelölte meg egymást ismerősként egy internetes közösségi oldalon. Szemléltessünk egy ilyen kapcsolatrendszert gráffal.

c) A versenyszerűen sportoló fiúk közül öten vízilabdáznak. Kérdésünkre elmondták, hogy a b) feladatban említett közösségi oldalon ők is regisztráltak. Mindegyikük elárulta, hogy maguk között hány társukkal jelölték meg egymást kölcsönösen ismerősként. A kapott válaszok 4, 4, 3, 2, 1. Mit gondolhatunk erről?

d) Egy 30 fős osztályban csak 13 fiú van. Az osztály egy bemutatóra táncprodukcióval készül, ahol 15 pár fog táncolni. Hányféleképpen alakulhatnak ki a párok, ha a lányok közül a szükséges létszám fiúnak öltözik. A fiúnak öltöző lányok személyét, valamint a párokat sorsolással alakítják ki.

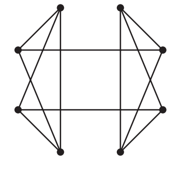
e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a d) feladatrészben említett sorsolás eredményeként az osztály tanulója Kis Mária fiúnak öltözött lánnyal táncol?

f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a d) feladatrészben említett sorsolás eredményeként a három versenytáncos lány, Kis Mária, Nagy Anita és Tóth Karola közül maximum kettőnek kell fiúnak öltöznie?

g) Hányféleképpen sorsolhatnak ki a d) feladatrészben említett osztály tanulói között nyolc különböző ajándéktárgyat, ha egy tanuló csak egy ajándéktárgyat kaphat? Ezek között hány olyan eset van, hogy fiú is van a nyertesek között? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az osztályba jár 14 sportoló lány és 3 lány, aki egyáltalán nem is sportol. Tehát a lányok minimum 17-en vannak, de nem is lehetnek többen, mert van 13 matematika szakkörös fiú. Vagyis 17 lány és 13 fiú jár az osztályba.

b) Az *ábrán* látható gráf megfelel a feladat követelményeinek.



c) Ha a kapcsolatrendszert gráffal próbáljuk szemléltetni, akkor egy 5 csúcsú egyszerű gráfot próbálunk rajzolni, melyben van két negyedfokú pont. A negyedfokú pontok mindegyikéből az összes többi csúcsba halad él, ez pedig ellentmond az elsőfokú pont létezésének. Tehát az öt fiú közül legalább az egyik tévedett.

d) A 17 lány közül $\binom{17}{2}$-féleképpen választhatjuk ki a fiúnak öltözőket. Az előző esetek mindegyikében 15!-féleképpen sorsolhatóak ki a párok. Tehát $\binom{17}{2} \cdot 15! \approx 1{,}78 \cdot 10^{14}$-féleképpen alakulhatnak ki a párok.

e) Kedvező esetek száma: a fiúnak öltöző lányokat ez esetben $\binom{16}{2}$-féleképpen választhatjuk, hisz Kis Mária nem választható. Az előző esetek mindegyikében Kis Máriának kétféle partnere lehet, a további párok pedig 14!-féleképpen alakulhatnak. Az összes eset száma az előző feladatrészből ismert. Vagyis:

$$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{\binom{16}{2} \cdot 2 \cdot 14!}{\binom{17}{2} \cdot 15!} = \frac{2}{17}.$$

f) Ez egy biztos esemény, tehát a valószínűség: 1.

g) 8 különböző ajándéktárgyat egy 30 fős osztályban $\frac{30!}{22!}$-féleképpen sorsolhatunk ki, ha egy tanuló csak egyet nyerhet. Azon esetek száma, amelyben fiú is van a nyertesek között, úgy számolható, hogy a sorsolás összes kimenetelének számából levonjuk a fiúnyertest nem tartalmazó kimenetelek számát, vagyis: $\frac{30!}{22!} - \frac{17!}{9!} \approx 2{,}35 \cdot 10^{11}$.