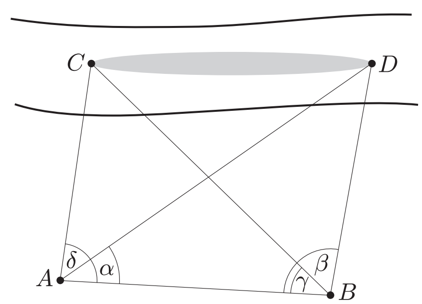
Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Egy térképész azt a feladatot kapta, hogy az *ábrán* látható folyó közepe táján található, hosszúkás sziget CD hosszára adjon egy viszonylag elfogadható becslést. A folyó gyors sodrású és örvényes, ezért a térképész nem kelt át a szigetre, hanem máshogy oldotta meg a feladatot.



A parti síkságon kijelölte egymástól 100 méterre az A és B pontokat az *ábra* szerint, azután lemérte az $\alpha = 38°$, $\delta = 85°$, $\beta = 97°$ és $\gamma = 41°$ szögek fokra kerekített értékét, majd kiszámolta a sziget közelítő hosszát. Számoljuk ki mi is. (*12 pont*)

2. *a*) Fogalmazzuk meg a következő állítás megfordítását, és adjuk meg, hogy a megfordítás igaz-e vagy hamis:

Ha egy négyszög deltoid, akkor valamelyik átlóját a másik átlója felezi.

b) Tagadjuk a következő mondatot:

Amelyik kutya ugat, az nem harap.

c) Anett, Béla és Cecília nagyon jó barátok. Zongoraművész, tanító és mérnök a hivatásuk, de nem feltétlenül ebben a sorrendben. Egyikük budapesti, a másik debreceni, a harmadik pedig szombathelyi lakos. Béla és Cecília a következő nyári szünetben Szombathelyre szeretnének utazni, hogy meglátogassák Anettet, aki egyedül él ott nagy kertes házában, és nála szeretnék a nyári szabadságot eltölteni. A zongoraművész megígérte, hogy ekkor Bélának ad egyet legújabb műsoros CD-jéből. A mérnök, aki nem budapesti, szeret sakkozni a debreceni zongoraművésszel, remélhetőleg erre is alkalom nyílik a szabadság alatt. Ki hol lakik és mi a foglalkozása? (*12 pont*)

3. *a*) Melyik az a szám, melyet tízes alapú logaritmusára emelve négyzetének százmilliószorosát kapjuk?

b) Egymillió forintot kötünk le egy bankban évi 2,5%-os kamatra. A kamatot az év utolsó napján írják hozzá a tőkéhez, miután levonták belőle a 16%-os kamatadót és 6%-os egészségügyi hozzájárulást (ami szintén a kamatot terheli). Hányadik év végén lépi túl lekötésünk az 1,2 millió forintot? (*13 pont*)

4. Tekintsük a hozzárendelési szabályával megadott következő függvényt:

$$f\colon x \to \begin{cases} \dfrac{12}{x}, & \text{ha } x < -3, \\ \left|x^2 - 4\right|, & \text{ha } -3 \le x < 3, \\ -\dfrac{12}{x}, & \text{ha } x \ge 3. \end{cases}$$

a) Ábrázoljuk a függvényt a $[-12; 12]$ intervallumon.

b) Adjuk meg a függvény zérushelyeit.

c) Adjuk meg a függvény értékkészletét.

d) Adjuk meg a függvény szélsőértékhelyeit és szélsőértékeit, továbbá a lokális szélsőértékhelyeit és lokális szélsőértékeit is.

e) Páros függvény-e az f függvény? (*14 pont*)

II. rész

5. Adott egy dobótetraéder (olyan szabályos és homogén tömegeloszlású tetraéder, melynek lapjaira 1, 2, 3 és 4 van írva) és egy dobóoktaéder (olyan szabályos és homogén tömegeloszlású oktaéder, melynek lapjaira 1-től 8-ig vannak felírva a természetes számok). Dobjunk egyszerre a dobótetraéderrel és a dobóoktaéderrel. Legyen egy kísérlet kimenetele azoknak a számoknak az összege, amelyek az asztallal érintkező lapokra vannak felírva.

a) Ábrázoljuk az így definiált valószínűségi változó eloszlását oszlopdiagramon, illetve számoljuk ki a várható értéket.

b) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a dobóoktaéder asztallal érintkező lapján nagyobb szám lesz, mint a dobótetraéder asztallal érintkező lapján?

c) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kimenetel a nyolcadik alkalommal lesz először 9, ha a kísérletet sokszor elvégezzük egymás után?

d) Elvégeztük a kísérletet százszor. A kimeneteleket feljegyezve az alábbi gyakorisági táblázatot kaptuk. Melyik kimenetel esetén a legnagyobb a relatív gyakoriság és a három tizedesre kerekített elméleti valószínűség abszolút eltérése?

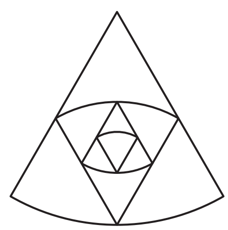
kimenetel	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
gyakoriság	0	6	10	13	15	8	16	14	11	5	2

(*16 pont*)

6. *a*) Két pozitív egész szám köbének különbsége 169. Melyek ezek a számok?

b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív természetes szám ötödik hatványából kivonjuk magát a számot, a különbség minden esetben osztható lesz a három legkisebb pozitív prímszámmal. (*16 pont*)

7. Az 1000 méter sugarú 60 fokos középponti szögű körcikkbe a képen látható módon újabb hozzá hasonló körcikkeket rajzolunk, és ezt a „végtelenségig" folytatjuk.



a) Mennyi a 12. beírt (vagyis a 13. lerajzolt) körcikk területe és kerülete?

b) Tekintsük a körcikkek kerületeinek olyan sorozatát, melynek első eleme az 1000 méter sugarú körcikk, és számítsuk ki az első 13 elem összegét.

c) Tekintsük a körcikkek területeinek olyan sorozatát, melynek első eleme az 1000 méter sugarú körcikk területe, és a további körcikkeket a fent leírt módon kapjuk. Jelölje ezeket a területeket T_1, T_2 stb. Mennyi S_n, ha $n \to \infty$? (*16 pont*)

8. Egy háromszög csúcspontjainak koordinátái $A(2;5)$, $B(7;-7)$, $C(-4;-3)$. Az A csúcson áthaladó belső szögfelező D pontban metszi a BC oldalt.

a) Írjuk fel az A csúcson áthaladó belső szögfelező egyenes egyenletét.

b) Adjuk meg az $\overrightarrow{AD}$ vektor koordinátáit és abszolútértékét.

c) Határozzuk meg az $\overrightarrow{AD}$ vektor és a $\overrightarrow{BC}$ vektor hajlásszögét.

d) Létezhet-e olyan ABC háromszög, amelynek az A csúcson áthaladó belső szögfelezőjének háromszögön belüli szakasza hosszabb, mint az AB oldal? Ha igen, akkor mi ennek a feltétele a háromszög szögeivel kifejezve? (*16 pont*)

9. Egy 30 fős osztály tanulói közül 11 fiú és 8 lány játszik valamilyen hangszeren. 9 fiú és 14 lány versenyszerűen sportol, valamint 13 fiúról mondható el, hogy jár matematika szakkörre. A lányok közül hárman egyáltalán nem sportolnak semmit, de járnak matematika szakkörre.

a) Hány fiú és hány lány van az osztályban?

b) A hangszeren játszó 8 lány közül, mindegyikük pontosan három másikkal jelölte meg egymást ismerősként egy internetes közösségi oldalon. Szemléltessünk egy ilyen kapcsolatrendszert gráffal.

c) A versenyszerűen sportoló fiúk közül öten vízilabdáznak. Kérdésünkre elmondták, hogy a *b*) feladatban említett közösségi oldalon ők is regisztráltak. Mindegyikük elárulta, hogy maguk között hány társukkal jelölték meg egymást kölcsönösen ismerősként. A kapott válaszok 4, 4, 3, 2, 1. Mit gondolhatunk erről?

d) Egy 30 fős osztályban csak 13 fiú van. Az osztály egy bemutatóra táncprodukcióval készül, ahol 15 pár fog táncolni. Hányféleképpen alakulhatnak ki a párok, ha a lányok közül a szükséges létszám fiúnak öltözik. A fiúnak öltöző lányok személyét, valamint a párokat sorsolással alakítják ki.

e) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a *d*) feladatrészben említett sorsolás eredményeként az osztály tanulója Kis Mária fiúnak öltözött lánnyal táncol?

f) Mennyi a valószínűsége annak, hogy a *d*) feladatrészben említett sorsolás eredményeként a három versenytáncos lány, Kis Mária, Nagy Anita és Tóth Karola közül maximum kettőnek kell fiúnak öltöznie?

g) Hányféleképpen sorsolhatnak ki a *d*) feladatrészben említett osztály tanulói között nyolc különböző ajándéktárgyat, ha egy tanuló csak egy ajándéktárgyat kaphat? Ezek között hány olyan eset van, hogy fiú is van a nyertesek között?

(*16 pont*)