Beszámoló az 54. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát július 18–28. között Kolumbiában, a Karib-tenger partján fekvő Santa Martában rendezték meg.

A versenyen 97 ország 527 diákja vett részt. A legtöbb ország a megengedett maximális létszámú, 6 fős csapattal szerepelt; az alábbi listában az országnév után zárójelben tüntettem fel az adott ország versenyzőinek számát, ha ez hatnál kevesebb volt.

A résztvevő országok: *Amerikai Egyesült Államok, Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán, Banglades (4), Belgium, Belorusszia, Bolívia (5), Bosznia-Hercegovina, Brazília, Bulgária, Chile (3), Ciprus (5), Costa Rica, Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Dél-Korea, Ecuador, El Salvador (2), Észak-Korea, Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-Szigetek (5), Görögország, Grúzia, Hollandia, Honduras (1), Hong Kong, Horvátország, India, Indonézia, Irán, Írország, Izland, Izrael, Japán, Kanada, Kazahsztán, Kína, Kirgizisztán, Kolumbia, Koszovo, Kuba (1), Lengyelország, Lettország, Liechtenstein (1), Litvánia, Luxemburg (2), Macedónia, Magyarország, Malajzia, Marokkó (5), Mexikó, Moldova, Mongólia, Montenegro (4), Nagy-Britannia, Németország, Nicaragua (3), Nigéria (1), Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország, Pakisztán, Panama (4), Paraguay, Peru, Portugália, Puerto Rico (4), Románia, Spanyolország, Sri Lanka, Svájc, Svédország, Szaúd-Arábia, Szerbia, Szingapúr, Szíria (4), Szlovákia, Szlovénia, Tadzsikisztán, Tajvan, Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago, Tunézia (5), Türkmenisztán, Uganda (5), Új-Zéland, Ukrajna, Uruguay, Venezuela (1), Vietnam.*

A versenyen szokás szerint mindkét napon négy és fél óra alatt 3–3 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat alább közöljük.) Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 31–42 pontot elért, ezüstérmet a 24–30 pontos, míg bronzérmet a 15–23 ponttal rendelkező tanulók szereztek. Dicséretben részesültek azok a versenyzők, akiknek 15-nél kevesebb pontjuk volt, de egy feladatot hibátlanul megoldottak.

A magyar csapatból

Janzer Olivér (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) 28 ponttal és
Szabó Attila (Pécs, Leőwey Klára Gimn., 12. o.t.) 24 ponttal *ezüstérmet,*
Nagy Róbert (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) 23 ponttal,
Tardos Jakab (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) 22 ponttal,
Havasi Márton (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) 21 ponttal és
Fehér Zsombor (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 10. o.t.) 16 ponttal *bronzérmet* szerzett.

A magyar csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék), helyettes vezetője *Dobos Sándor* (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn.) volt. *Kós Géza* (MTA SZTAKI, ELTE TTK) a problémakiválasztást előkészítő bizottság meghívott tagjaként vett részt az olimpián.

Az országok (nem-hivatalos) pontversenyében Magyarország a 22. helyen végzett (holtversenyben Romániával és Belorussziával). A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. Kína 208, 2. Dél-Korea 204, 3. USA 190, 4. Oroszország 187, 5. Észak-Korea 184, 6. Szingapúr 182, 7. Vietnam 180, 8. Tajvan 176, 9. Nagy-Britannia 171, 10. Irán 168, 11–12. Japán és Kanada 163, 13–14. Izrael és Thaiföld 161, 15. Ausztrália 148, 16. Ukrajna 146, 17–18. Mexikó és Törökország 139, 19. Indonézia 138, 20. Olaszország 137, 21. Franciaország 136, **22–24.** Belorusszia, **Magyarország** és Románia **134**, 25. Hollandia 133, 26. Peru 132, 27. Németország 127, 28. Brazília 124, 29. India 122, 30. Horvátország 119, 31–32. Hong Kong és Malajzia 117, 33. Kazahsztán 116, 34–35. Szerbia és Szlovákia 112, 36. Portugália 111, 37. Csehország 108, 38–39. Bulgária és Görögország 101, 40–41. Örményország és Svájc 88, 42–43. Mongólia és Szaúd-Arábia 84, 44. Belgium 82, 45. Lengyelország 79, 46–47. Litvánia és Türkmenisztán 78, 48–50. Ausztria, Kolumbia és Új-Zéland 77 ponttal.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. Az alábbi felsorolásban minden tanár neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik a tanítványaik:

Dobos Sándor (FZs, HM, JO, NR), *Gyenes Zoltán* (FZs), *Kiss Géza* (HM, JO, NR, TJ), *Kiss Zoltán* (SzA), *Pósa Lajos* (FZs, HM, JO, NR, TJ), *Surányi László* (HM, JO, NR), *Táborné Vincze Márta* (HM, JO, NR, TJ).

Ugyancsak szeretnék köszönetet mondani Dobos Sándornak, mint a központi olimpiai előkészítő szakkör vezetőjének, továbbá azoknak a fiatal matematikusoknak és egyetemistáknak, akik a felkészítésben közreműködtek.

Az idei verseny eredményére is erősen hatott a túl könnyű, illetve túl nehéz feladatok szerepeltetése a verseny feladatai között. Az első 25 helyen végzett ország versenyzői mind a maximális 42 pontot szerezték meg a 4. feladatra – egyedül egy kínai versenyző vesztett 1 pontot! A negyediknél valamivel nehezebbnek ítélt első feladatra is a fenti 25 ország közül 18 a maximális 42 pontot szerezte meg, 3 ország 1, 1 ország 2, 1 pedig 3 pontot vesztett. Mindössze két olyan ország akadt, ahol volt egy versenyző, aki nem oldotta meg az első feladatot. Tehát a szóbanforgó 150 versenyző közül 150 megoldotta a negyedik és 148 lényegében megoldotta az első feladatot. Ez a két feladat tehát semmi különbséget nem tett e között a 150 versenyző között – számukra a verseny így eleve négyfeladatosra szűkült. Tovább szűkítette a verseny eredményére befolyással bíró feladatok körét a rendkívül nehéz 6. feladat. Ezt a feladatot az összesen 527 versenyző közül csak 7-en oldották meg hibátlanul, viszont 481(!) diák 0 pontot kapott rá.

A nagyon könnyű feladatok választására még van némi elfogadható magyarázat: nyilván ezzel az a zsűri célja, hogy a gyengébben szereplő országok versenyzői se maradjanak sikerélmény nélkül. Erre a célra azonban elég volna egy igazán könnyű feladat. A túl nehéz feladatok évek óta tartó szerepeltetését viszont nem indokolja semmi. Jelen sorok írója a zsűriülésen ismételten felszólalt a túlságosan nehéz feladatok kiválasztása ellen – mint látható, a zsűri a feladatokat kiválasztó szavazási procedúra során nem vette figyelembe ezeket az aggályokat.

Maradt tehát három feladat az élmezőny sorrendjének eldöntésére: a 2., 3. és 5. Ebből a magyar csapat a 2. feladaton biztatóan szerepelt: 4-en megoldották és a másik két versenyző is megoldotta a feladat könnyebbik részét. (Így ezen a feladaton a 9. legjobb eredményt értük el.) Sajnos a viszonylag könnyű 5. és a nehéz geometriai 3. feladat nem sikerült ilyen jól: csak 1-1 jó megoldás született mindegyikre. Ebből különösen az 5. feladat eredménye sajnálatos: ezen a feladaton elért akár csak közepes eredménnyel is jóval előrébb végezhettünk volna az országok közötti pontversenyben.

Pozitív fejlemény néhány korábbi évhez képest, hogy a megoldások leírása gondos és precíz volt (beleértve az olvasható kézírást is!). Mindenkinek, aki jövőre az olimpiai csapatba kerülésre pályázik, melegen ajánlom a KöMaL B feladatainak megoldását és beküldését (a precíz leírások gyakorlására) és az A feladatok megoldását is (igazán nehéz feladatokkal való ismerkedésre).

A nagy melegben jéghidegre légkondicionált helyiségek, illetve a csapvíz, a belőle készült jégkockák, és a vele mosott gyümölcsök okoztak ugyan némi múló panaszokat, de ha ezektől, továbbá a buszokra való néha egyórányi várakozásoktól eltekintünk, összességében egy jó hangulatú, kellemes olimpián vettünk részt.

Az olimpiai felkészülés utolsó hetében (július 8–12.) Tigelmann Péter úr, a dombóvári (közelebbről gunarasfürdői) Európa szálló és apartment-park igazgatója vendégei voltunk. 17 diák volt jelen: az IMO- és MEMO-csapat tagjai, és még néhány meghívott, pl. a jövő évi lányolimpiai csapatba kerülésre pályázók. Délelőttönként én tartottam előadásokat az olimpián várható különféle témakörökből, délutánonként pedig Dobos Sándor és Hujter Bálint irányításával feladatmegoldás folyt. Köszönjük Tigelmann úr nagyvonalú támogatását!

A következő diákolimpiát Fokvárosban, Dél-Afrikában rendezik, 2014. július 3–13. között.

Pelikán József

Az 54. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai*

Első nap

1. feladat. Bizonyítsuk be, hogy bármilyen pozitív egész k és n számok esetén található k (nem feltétlenül különböző) pozitív egész: $m_1, m_2, \dots, m_k$, amikre

$$1+\frac{2^k-1}{n}=\left(1+\frac{1}{m_1}\right)\left(1+\frac{1}{m_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{m_k}\right).$$

2. feladat. A sík 4027 pontjából álló alakzatot *kolumbiainak* nevezzük, ha 2013 pontja pirosra, a többi 2014 kékre van színezve, és az alakzat semelyik három pontja sincs egy egyenesen. Néhány egyenese meghúzásával a síkot tartományokra bontjuk. Az egyeneseknek ezt az elrendezését a kolumbiai alakzatra nézve *jónak* nevezzük, ha a következő két feltétel teljesül:

- semelyik egyenes sem megy át az alakzat semelyik pontján sem;
- nincs olyan tartomány, amelyik mindkét színű pontot tartalmaz.

Határozzuk meg a legkisebb olyan k értéket, amire igaz az, hogy 4027 pontból álló bármely kolumbiai alakzatra van k egyenesből álló *jó* elrendezés.

3. feladat. Az ABC háromszög A csúccsal szemközti hozzáírt köre érintse a BC oldalt az A_1 pontban. Hasonlóan definiáljuk a CA oldal B_1 pontját, ill. az AB oldal C_1 pontját a B-vel, ill. C-vel szemközti hozzáírt körök segítségével. Tegyük fel, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög körülírt körének a középpontja az ABC háromszög körülírt körén fekszik. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög derékszögű.

Az ABC háromszög A csúccsal szemközti hozzáírt köre *az a kör, ami érinti a BC szakaszt, továbbá az AB félegyenes B-n túli részét és az AC félegyenes C-n túli részét. Hasonlóan vannak definiálva a B, ill. a C csúccsal szemközti hozzáírt körök.*

Második nap

4. feladat. Legyen az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja H, és legyen W a BC oldal egy belső pontja. A B-ből, ill. C-ből induló magasságok talppontjai legyenek M, ill. N. Jelölje ω_1 a BWN háromszög körülírt körét, és legyen X az ω_1 kör azon pontja, amire WX ω_1-nek átmérője. Hasonlóan, jelölje ω_2 a CWM háromszög körülírt körét, és legyen Y az ω_2 kör azon pontja, amire WY ω_2-nek átmérője. Bizonyítsuk be, hogy az X, Y és H pontok egy egyenesen fekszenek.

*Az olimpia honlapja: `http://www.uan.edu.co/imo2013/en/`.

5. feladat. Jelölje $\mathbb{Q}_{>0}$ a pozitív racionális számok halmazát. Legyen $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, ami kielégíti az alábbi három feltételt:

(i) Minden $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$-ra $f(x)f(y) \geq f(xy)$;

(ii) Minden $x, y \in \mathbb{Q}_{>0}$-ra $f(x+y) \geq f(x) + f(y)$;

(iii) Létezik olyan $a > 1$ racionális szám, amire $f(a) = a$.

Bizonyítsuk be, hogy $f(x) = x$ minden $x \in \mathbb{Q}_{>0}$-ra.

6. feladat. Legyen $n \geq 3$ egész szám, és tekintsünk egy kört, amit $n+1$ ponttal egyenlő hosszúságú ívekre osztottunk. Tekintsük ezeknek a pontoknak a $0, 1, \ldots, n$ számokkal való összes olyan számozását, ahol minden számot pontosan egyszer használtunk; két ilyen számozást azonosnak tekintünk, ha egyiket a másikból megkaphatjuk a kör egy elforgatásával. Egy számozást *szépnek* nevezünk, ha bármely négy $a < b < c < d$ számra, amikre $a + d = b + c$, fennáll az, hogy az a és d jelű pontokat összekötő húr nem metszi a b és c jelű pontokat összekötő húrt.

Legyen M a szép számozások száma, és legyen N a pozitív egészekből álló olyan (x, y) rendezett párok száma, amikre $x + y \leq n$ és $\operatorname{lnko}(x, y) = 1$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$M = N + 1.$$