Megoldásvázlatok a 2012/8. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Egy iskola 520 tanulójával 9 kérdésből álló tesztet töltettek ki. A kérdésekre igennel vagy nemmel lehetett válaszolni. Mindenki válaszolt az összes kérdésre. Az értékelés úgy történt, hogy a k. kérdésre adott jó válasz k pontot, rossz válasz $-k$ pontot ért.*

a) Mutassuk meg, hogy biztosan volt két tanuló, aki ugyanúgy töltötte ki a tesztlapot.

b) Legalább hány tanulónak volt ugyanannyi pontja az értékelés után?

(*11 pont*)

Megoldás. *a*) Mivel $2^9=512$-féleképpen lehet a tesztlapot kitölteni, azért 520 tanuló között biztosan lesznek ketten, akik ugyanúgy töltötték ki a tesztet.

b) A maximális pontszám: $1+2+\ldots+9=\dfrac{9\cdot 10}{2}=45$. A minimális pontszám: -45.

Egy feladatra adott hibás válasszal páros pontszámmal csökken az elérhető maximális pontszám, tehát -45 és 45 közötti páratlan számok lehetnek a pontszámok. Mivel ezen az intervallumon 46 páratlan szám van, azért 46-féle végösszeg lehet. (Könnyen látható, hogy ezek mindegyike valóban elő is fordulhat.) Ha minden pontszámot legfeljebb 11 tanuló ért volna el, akkor $46\cdot 11=506$ diák járhatna maximálisan az iskolába.

Tehát biztosan volt legalább 12 tanuló, akik ugyanannyi pontszámot szereztek.

2. *a*) *Állítsuk elő a 2012-t szomszédos természetes számok összegeként.*

b) *Egy számtani sorozat első 2013 elemének összege 2012. Az első 2012 elem közül a páros indexűek összege eggyel több, mint a páratlan indexűek összege. Határozzuk meg a sorozat első elemét.* (*13 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen a legkisebb szám $k+1$, a legnagyobb $k+n$.

Ezek összege:

$$nk+\frac{n(n+1)}{2}=2012=2^2\cdot 503,$$
$$n(2k+n+1)=8\cdot 503.$$

A bal oldali szorzat két tényezője két különböző paritású természetes szám, és a második nagyobb, mint az első, tehát $n=8$.

Mivel $2k+8+1=503$, azért $k=247$. Tehát a keresett szomszédos természetes számok:

$$248+249+250+251+252+253+254+255=2012.$$

b) Mivel a számtani sorozat első 2013 elemének összege 2012, azért felírható, hogy

$$S_{2013}=2013\cdot\frac{2a_1+2012d}{2}=2012,$$
$$a_1=\frac{2012}{2013}-1006d.$$

Tudjuk, hogy az első 2012 elem közül a páros indexűek összege eggyel nagyobb, mint a páratlan indexűek összege, azaz:

$$(a_{2012}+\ldots+a_2)-(a_{2011}+\ldots+a_1)=1,$$
$$(a_{2012}-a_{2011})+\ldots+(a_2-a_1)=1,$$
$$1006d=1.$$

Tehát a sorozat első eleme: $a_1=\dfrac{2012}{2013}-1=-\dfrac{1}{2013}$.

3. *Adott a valós számokon értelmezett*

$$I(x)=\int_{-2}^{x}f(t)\,dt$$

függvény, és tudjuk, hogy $f(t)=3t^2+4t-1$. Határozzuk meg az $I(x)$ zérushelyeit, és azokat az intervallumokat, melyeken konvex, illetve konkáv a függvény. (*13 pont*)

Megoldás.

$$\begin{aligned}I(x)&=\int_{-2}^{x}\left(3t^2+4t-1\right)dt=\left[t^3+2t^2-t\right]_{-2}^{x}=x^3+2x^2-x-(-8+8+2)=\\&=x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)=(x+2)\left(x^2-1\right)=\\&=(x+2)(x+1)(x-1).\end{aligned}$$

Tehát $I(x)$ zérushelyei: $x=-2,\,-1,\,1$.

$I(x)$ második deriváltjának előjeléből állapíthatjuk meg, hogy hol konvex, illetve hol konkáv a függvény.

$$I''(x)=\left(x^3+2x^2-x-2\right)''=\left(3x^2+4x-1\right)'=6x+4.$$

Ha $x>-\dfrac{2}{3}$, akkor $I(x)$ konvex. Ha $x<-\dfrac{2}{3}$, akkor $I(x)$ konkáv. (Az $x=-\dfrac{2}{3}$-nál inflexiós pont van.)

4. *A párizsi Louvre üvegpiramisának (szabályos négyoldalú gúla) alapélét vegyük* 34 m*-nek, magasságát pedig* 22 m*-nek.*

a) Mekkora felületet kell az ablakmosó csapatnak letisztítania, ha kívülről és belülről is lemossák az üveglapokat?

Éjszaka a piramist oszlopokon álló reflektorokkal szeretnék megvilágítani. Az oszlopokat egy négyzet csúcsaiban állítják fel, melynek oldalfelező pontjai a piramis alapjának csúcsai.

b) Milyen magasan kell a reflektorokat az oszlopon elhelyezni, hogy a belőlük kiinduló fénysugarak az oldallapok súlypontjaiban merőlegesen essenek az üvegfelületekre?

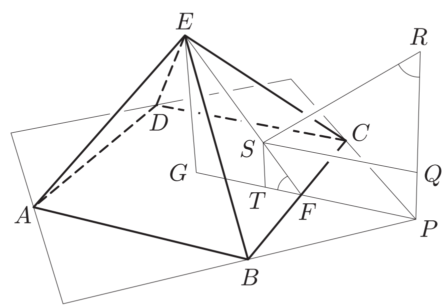
(*14 pont*)

Megoldás. *a*) Készítsünk a szöveg alapján *ábrát.* Tudjuk, hogy

$$AB=34,\quad EG=22.$$

Ekkor Pitagorasz-tétellel:

$$EF=\sqrt{22^2+\left(\frac{34}{2}\right)^2}\approx 27{,}8.$$



A gúla palástjának kétszeresét kell vennünk:

$$2\cdot t_{\text{palást}}=8\cdot\frac{BC\cdot EF}{2}=4\cdot BC\cdot EF=4\cdot 34\cdot 27{,}8=3780{,}8\ \mathrm{m}^2.$$

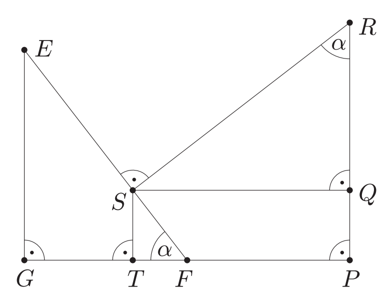
Tehát kb. 3781 m^2 üvegfelületet kell lemosniuk.

b) Rajzoljuk le a számunkra fontos síkmetszetet, és alkalmazzuk az *ábra* jelöléseit. Ekkor

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{22}{17},\quad \text{vagyis}\quad \alpha\approx 52{,}3^\circ.$$

Már tudjuk, hogy $EF\approx 27{,}8$, ezért

$$SF=\frac{27{,}8}{3}\approx 9{,}27.$$



GFE és PRS merőleges szárú hegyesszögek, tehát egyenlők. Tudjuk, hogy $TF = \dfrac{17}{3} \approx 5{,}67$, ezért $SQ = TF + FP = 5{,}67 + 17 = 22{,}67$.

$$\begin{aligned} &QP = ST = SF \cdot \sin\alpha = 9{,}27 \cdot \sin 52{,}3^\circ \approx 7{,}33, \\ &\frac{SQ}{QR} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{22}{17} = \frac{22{,}67}{QR}, \quad \text{vagyis} \quad QR \approx 17{,}52, \\ &PR = QP + QR = 7{,}33 + 17{,}52 = 24{,}85. \end{aligned}$$

A reflektorokat az oszlopokon kb. 25 m magasan kell elhelyezni.

II. rész

5. *Adott az $f(x) = \log_2(x+4)+1$ hozzárendelésű függvény. Tudjuk, hogy az A_nOC_n háromszögek egyenlőszárú, O-nál derékszögű háromszögek, ahol A_n az $f(x)$ függvény grafikonjának egy pontja, O pedig az origó.*

a) Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt. Adjuk meg egy tetszőleges A_n esetén a háromszög C_n csúcsának koordinátáit.

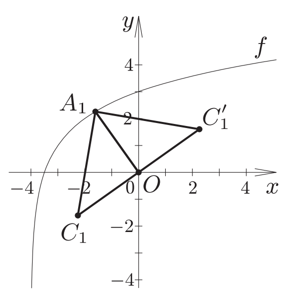
b) Határozzuk meg a C_n pontok halmazát, és ábrázoljuk a koordinátarendszerben.

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az $f(x)$ grafikonjáról választunk egy tetszőleges pontot. Legyen az első koordinátája a. Ekkor a második koordinátája:

$$f(a) = \log_2(a+4)+1.$$

Vagyis a választott pont: $A_1\big(a; \log_2(a+4)+1\big)$.



A háromszög harmadik csúcsát megkapjuk, ha az origó körül 90 fokkal elforgatjuk a választott A_1 pontot. Ha a körüljárástól eltekintünk, két lehetőség adódik a harmadik csúcsra attól függően, hogy merre forgatunk:

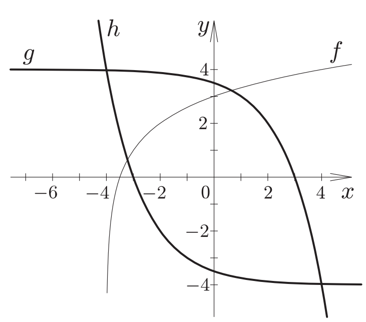
$$C_1\big(-\log_2(a+4)+1; -a\big), \quad \text{illetve} \quad C_1'\big(\log_2(a+4)+1; a\big).$$

b) Az A_n pontot egy O körüli 90°-os forgatás viszi a C_n pontba. A 90°-os forgatást két, origón áthaladó, egymással 45°-os szöget bezáró egyenesre való tengelyes tükrözés szorzatával helyettesíthetjük. A két tengely egyenlete: $t_1: y = x$, $t_2: y = 0$. Vagyis az $f(x)$ grafikonját kell transzformálnunk

1) $t_1 \cdot t_2$-vel, azaz $+90^\circ$-os O körüli forgatással.

2) $t_2 \cdot t_1$-gyel, azaz -90°-os O körüli forgatással;

1) Az $y = \log_2(x+4)+1$ egyenlettel megadott ponthalmazt tükrözve a t_2-re az $y = -\log_2(x+4)-1$ egyenlettel megadott ponthalmazt kapjuk. Ezt tükrözve a t_1-re: $x = -\log_2(y+4)-1$.



Fejezzük ki az y-t:

$$\log_2(y+4) = -(x+1),$$
$$2^{-(x+1)} = y+4,$$
$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4.$$

Ez a ponthalmaz a $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 4$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjával azonos.

2) Az $y = \log_2(x+4)+1$ egyenlettel megadott ponthalmazt tükrözve a t_1-re az $x = \log_2(y+4)+1$ egyenlettel megadott ponthalmazt kapjuk. Fejezzük ki az y-t:

$$x-1 = \log_2(y+4),$$
$$y+4 = 2^{x-1},$$
$$y = 2^{x-1} - 4.$$

Ezt tükrözzük a t_2-re:

$$y = -2^{x-1} + 4.$$

Ez a ponthalmaz a $g(x) = -2^{x-1} + 4$ hozzárendeléssel adott függvény grafikonjával azonos.

Megjegyzés: Ezeket a megoldásokat az *a*) részben alkalmazott módszerekkel is megkaphatjuk.

6. *Oldjuk meg a következő egyenleteket:*

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2-x}} = \sqrt{2}$;

b) $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sqrt{2}$. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A feladat értelmezési tartománya: $2+x>0$ és $2-x>0$, vagyis $x \in]-2;2[$.
Mindkét oldalt megszorozva $\sqrt{2+x}\cdot\sqrt{2-x}$-szel:

$$\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{4-x^2} = \sqrt{8-2x^2}.$$

Ha $\sqrt{2-x} < \sqrt{2+x}$, akkor nyilván nincs megoldás, hiszen az egyenlet egyik oldala negatív, a másik pedig nemnegatív.

Ha $\sqrt{2-x} \ge \sqrt{2+x}$, vagyis $2-x \ge 2+x$, azaz $-2 < x \le 0$, akkor négyzetre emeljük az egyenlet mindkét oldalát:

$$4 - 2\sqrt{4-x^2} = 2\left(4-x^2\right),$$
$$0 = \left(4-x^2\right) + \sqrt{4-x^2} - 2,$$
$$0 = \left(\sqrt{4-x^2}\right)^2 + \sqrt{4-x^2} - 2.$$

Megoldóképlettel:

$$\sqrt{4-x^2} = 1, \quad \text{valamint} \quad \sqrt{4-x^2} = -2.$$

A $\sqrt{4-x^2}$ negatív nem lehet. A $\sqrt{4-x^2} = 1$ egyenletből kapjuk, hogy $3 = x^2$. A két szám közül csak az $x = -\sqrt{3}$ felel meg a kikötéseknek, így az eredeti egyenletnek is csak ez az egy gyöke van.

b) A feladat értelmezési tartománya: $\sin^2 x \ne 0$ és $\cos^2 x \ne 0$, vagyis $x \ne k\cdot\dfrac{\pi}{2}$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk $\sin^2 x \cdot \cos^2 x$-szel:

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sqrt{2}\cdot\sin^2 x\cdot\cos^2 x,$$
$$\cos 2x = \frac{\sqrt{2}\cdot(2\cdot\sin x\cdot\cos x)^2}{4} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sin^2 2x}{4} = \frac{\sin^2 2x}{2\sqrt{2}},$$
$$2\sqrt{2}\cdot\cos 2x = 1 - \cos^2 2x,$$
$$\cos^2 2x + 2\sqrt{2}\cos 2x - 1 = 0.$$

Megoldóképlettel: $\cos 2x = -\sqrt{2}+\sqrt{3}$ és $\cos 2x = -\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Mivel $\cos 2x \in [-1;1]$, azért $\cos 2x = \sqrt{3}-\sqrt{2}$. Innen $2x \approx +1{,}25 + k\cdot 2\pi$ és $2x \approx -1{,}25 + k\cdot 2\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Vagyis: $x \approx +0{,}625 + k\pi$ és $x \approx -0{,}625 + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

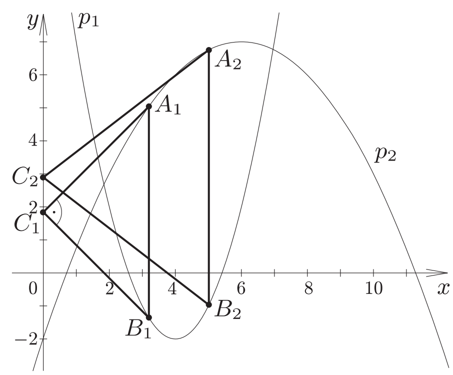
7. *A p_2 parabola csúcsa a $C''(6;7)$ pont, tengelye párhuzamos a $p_1\colon y=x^2-8x+14$ paraboláéval, és a $P\left(9;\dfrac{19}{4}\right)$ pont illeszkedik a p_2 parabolára.*

Az $A_nB_nC_n$ egyenlőszárú háromszögek alapja A_nB_n, ahol $A_n\in p_2$, $B_n\in p_1$, és C_n illeszkedik a koordinátarendszer ordinátatengelyére. Az A_n és a B_n pontok abszcisszája egyenlő, és a B_n pontok ordinátája kisebb, mint az A_n pontoké.

a) Határozzuk meg a C_1 pont koordinátáit, ha az $A_1B_1C_1$ háromszög derékszögű.

b) Az $A_nB_nC_n$ háromszögek közül melyiknek legnagyobb a területe? (*16 pont*)

Megoldás. *a)* A p_2 egy lefelé nyíló parabola: $(x-6)^2=-2p(y-7)$.



Felhasználjuk, hogy $P\in p_2$:

$$\begin{gathered}(9-6)^2=-2p(4{,}75-7),\\ 9=-2p(-2{,}25)=4{,}5p,\\ 2=p.\end{gathered}$$

Vagyis p_2 egyenlete: $(x-6)^2=-4(y-7)$, azaz $y=-\dfrac{1}{4}(x-6)^2+7$.

A B_n pontok ordinátája kisebb, mint az A_n pontoké, ezért:

$$\begin{gathered}x^2-8x+14<-\frac{1}{4}(x-6)^2+7,\\ -4x^2+32x-56>x^2-12x+8,\\ 0>5x^2-44x+64,\\ x_1\approx 1{,}84<x<6{,}96\approx x_2.\end{gathered}$$

Az $A_1B_1C_1$ egyenlő szárú háromszög akkor derékszögű, ha B_1 és A_1 ordinátájának különbsége abszcisszájuk kétszeresével egyenlő:

$$\begin{aligned}2x&=-0{,}25x^2+3x-2-\left(x^2-8x+14\right)=-1{,}25x^2+11x-16,\\ 0&=-1{,}25x^2+9x-16,\\ x_1&=3{,}2,\quad x_2=4.\end{aligned}$$

Tehát két ilyen háromszög van (mert mindkettő x eleme az általunk meghatározott intervallumnak):

$$\begin{array}{lll}A_1(3{,}2;-1{,}36), & B_1(3{,}2;5{,}04), & C_1(0;1{,}84),\\ A_1'(4;-2), & B_1'(4;6), & C_1'(0;2).\end{array}$$

b) Ha A_n és B_n abszcisszája x, akkor a háromszög alapja $-1{,}25x^2+11x-16$, magassága pedig x. Ekkor a terület:

$$t(x)=\frac{x\left(-1{,}25x^2+11x-16\right)}{2}=-0{,}625x^3+5{,}5x^2-8x.$$

$t(x)$ ott lesz maximális, ahol az első deriváltja 0, és pozitívból negatívba vált:

$$\begin{gathered}t'(x)=-1{,}875x^2+11x-8\quad\left(x\in\,]1{,}84;6{,}96]\,\right),\\ x_1\approx 0{,}85\quad\text{és}\quad x_2\approx 5{,}016.\end{gathered}$$

$t'(x)$ az x_2-ben pozitívból negatívba vált, tehát itt van a maximum helye a $t(x)$-nek.

A maximális terület: $t(5{,}016)\approx 19{,}376$. Tehát a csúcsok koordinátái (kerekített értékek): $A_2(5{,}016;6{,}758)$, $B_2(5{,}016;-0{,}968)$, $C_2(0;2{,}895)$.

8. Határozzuk meg az összes olyan $P(x) = ax^2 + bx + c$ egész együtthatós polinomot, melyre $\left|P(p_1)\right| = \left|P(p_2)\right| = \left|P(p_3)\right| = 5$, ahol p_1, p_2, p_3 különböző prímszámok. *(16 pont)*

Megoldás. Vizsgáljuk meg, hogy $P(p_i)$-k közül hány darab negatív előjelű van. A helyettesítési értékek közül csak a 0 vagy az 1 db negatív esetét tárgyaljuk, mert a többi esetben ha $P(x)$-et $-P(x)$-re cseréljük, akkor ugyanezekhez az esetekhez jutunk.

1. eset: $P(p_1) = P(p_2) = P(p_3) = 5$. A $P(x)-5$ polinomnak 3 különböző zérushelye van, de a fokszáma maximum 2, tehát $P_1(x) = 5$ konstans polinom.

2. eset: Az egyik helyettesítési érték negatív, pl. $P(p_1) = -5$. Ekkor $P(p_2) = P(p_3) = 5$. A $P(x) - 5$ polinomnak a p_2 és a p_3 zérushelye, tehát

$$P(x) - 5 = a(x - p_2)(x - p_3).$$

Helyettesítsünk p_1-et a fenti polinomba:

$$-5 - 5 = a \cdot (p_1 - p_2)(p_1 - p_3).$$

Ha p_i-k páratlan prímszámok, akkor a jobb oldalon álló szorzat osztható néggyel, a bal oldal pedig nem. Tehát a prímek közül az egyik 2-vel egyenlő.

i) Ha $p_1 = 2$, akkor $p_1 - p_2$ és $p_1 - p_3$ negatív páratlan számok, melyek szorzata pozitív páratlan szám, tehát $a = -2$. Az előbbi két kifejezés szorzata 5, így $p_1 - p_2 = -1$ és $p_1 - p_3 = -5$, azaz $p_2 = 3$ és $p_3 = 7$.

$$P(x) - 5 = -2(x - 3)(x - 7),$$
$$P_2(x) = -2(x - 3)(x - 7) + 5 = -2x^2 + 20x - 37.$$

ii) Ha p_2 vagy p_3 valamelyike 2 (például $p_2 = 2$), ekkor a jobboldali szorzat $p_1 - p_3$ tényezője páros, vagyis $p_1 - p_3$ lehetséges értékei 2, -2, 10, -10 és $p_1 - 2$ pozitív egész szám:

$$\begin{array}{ll}
-2 \cdot 5 = a(p_1 - 2) \cdot 2, & -2 \cdot 5 = a(p_1 - 2) \cdot (-2), \\
-5 = a(p_1 - 2), & 5 = a(p_1 - 2), \\
a = -1, \quad p_1 = 7, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 5, & a = 1, \quad p_1 = 7, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 9, \\
a = -5, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 1. & a = 5, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 5.
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
-2 \cdot 5 = a(p_1 - 2) \cdot 10, & -2 \cdot 5 = a(p_1 - 2) \cdot (-10), \\
-1 = a(p_1 - 2), & 1 = a(p_1 - 2), \\
a = -1, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = -7. & a = 1, \quad p_1 = 3, \quad p_2 = 2, \quad p_3 = 13.
\end{array}$$

A feladat feltételeinek a következők tesznek eleget:

$$(p_1; p_2; p_3) = (7; 2; 5), \qquad (p_1; p_2; p_3) = (3; 2; 5), \qquad (p_1; p_2; p_3) = (3; 2; 13).$$

Az így kapott polinomok:

$$P_3(x) = -1(x - 2)(x - 5) + 5 = -x^2 + 7x - 5,$$
$$P_4(x) = 5(x - 2)(x - 5) + 5 = 5x^2 - 35x + 55,$$
$$P_5(x) = 1(x - 2)(x - 13) + 5 = x^2 - 15x + 31.$$

Tehát 10 polinom felel meg a feladatban szereplő feltételeknek: a fent felsorolt 5, és ezek ellentettjei.

9. *A nemzetközi sporteseményeken a versenyzőket nem csak a dicsőség hajtja, hanem részben a reklámszerződésekkel járó magas pénzösszegek is. Így nem meglepő, ha a sportolók és az edzők időnként a győzelem megszerzése érdekében nem megengedett eszközöket is alkalmaznak.*

A lehetőségek szerinti legtisztességesebb feltételek biztosítása érdekében közvetlenül a fontos versenyek előtt, de a felkészülések során is meghatározott szabályok szerint dopping ellenőrzéseket tartanak. A sportolók vizeletmintát adnak, melyeket lepecsételve és megjelölve, két részben, egy úgynevezett A-próbaként, illetve B-próbaként őriznek meg és vizsgálnak.

Miközben a nemzetközi Sportszövetség egyértelmű, minden kétséget kizáró doppingteszt kialakításán fáradozik, addig bizonyos laborok olyan doppingszerek kifejlesztésén dolgoznak, melyek a kontroll során a vizeletből nem mutathatók ki. Az a) feladatrészben abból induljunk ki, hogy egy sportrendezvényen 2400 doppingvizsgálatnak alávetett résztvevőből 60-an egy bizonyos anyaggal doppingoltak. Az összes 2400 A-próbát ellenőrizték.

A tesztre a következő érvényes:

Amennyiben egy sportoló ezzel a szerrel doppingolt, akkor ezt a teszt 85% biztonsággal kimutatja. Ebben az esetben pozitív eredményről beszélünk.

Amennyiben egy sportoló nem használta az említett anyagot, úgy ezt a teszt 96% biztonsággal bizonyítja.

a) Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személyre az A-próba után hibás ítélet született.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A-próba után indokolatlanul vádoltak meg egy sportolót?

c) Mutassuk meg, hogy kisebb, mint 0,08 az esélye annak, hogy a B-próba után is indokolatlanul vádoltak valakit. *(16 pont)*

Megoldás. *a*) Hibás eredmény született, ha egy doppingolt sportoló tesztje negatívnak, vagy pedig egy nem doppingolt sportolóé pozitívnak bizonyul.

Jelölje D azt az eseményt, hogy egy versenyző doppingolt, T pedig azt, hogy a doppingpróba eredménye pozitív lett.

Adott: $P(D)=\dfrac{60}{2400}=0{,}025$, $P(T\mid D)=0{,}85$, $P(\overline{T}\mid\overline{D})=0{,}96=0{,}96$.

$$P(\overline{T}D)+P(T\overline{D})=P(\overline{T}\mid D)\cdot P(D)+P(T\mid\overline{D})\cdot P(\overline{D})=$$
$$=(1-0{,}85)\cdot 0{,}025+(1-0{,}96)(1-0{,}025)=0{,}042\,75.$$

Tehát a véletlenszerűen kiválasztott személy esetén kb. 4,3% valószínűséggel hibás eredmény született.

b) Meghatározandó a $P(\overline{D}\mid T)$.

$$P(\overline{D}\mid T)=\frac{P(\overline{D}T)}{P(T)}=\frac{P(T\mid\overline{D})\cdot P(\overline{D})}{P(T)}=\frac{P(T\mid\overline{D})\cdot P(\overline{D})}{P(T\mid D)\cdot P(D)+P(T\mid\overline{D})\cdot P(\overline{D})}=$$
$$=\frac{0{,}04\cdot 0{,}975}{0{,}85\cdot 0{,}025+0{,}04\cdot 0{,}975}=\frac{0{,}039}{0{,}02125+0{,}039}=0{,}6473.$$

A valószínűsége annak, hogy egy doppinggal vádolt sportoló nem doppingolt kb. 65%.

A tört nevezőjéből jól látható, hogy a doppinggal megvádolt sportolók túlnyomó része nem ezzel az (ismeretlen) anyaggal doppingolt. A nem doppingolt sportolók magas aránya eredményezi a teszthibából adódó sok hibás ítéletet.

c) A B-próbára csak abban az esetben kerül sor, ha az A-próba eredménye pozitív. Ebben az esetben a *b*) rész megoldása szerint annak a valószínűsége, hogy valaki nem doppingolt, illetve doppingolt, rendre $P(\overline{D}_B)=0{,}6473$, és $P(D_B)=1-0{,}6473=0{,}3527$.

Úgy, mint a *b*) feladatrészben, az eredmény:

$$P(\overline{D}_B\mid T_2)=\frac{0{,}04\cdot 0{,}6473}{0{,}85\cdot 0{,}3527+0{,}04\cdot 0{,}6473}\approx 0{,}0795<0{,}08.$$

Simon János