

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Értelmezzünk az $\mathbb{R} \setminus \{3; 4\}$ halmazon az $f(x) = \frac{x-671}{x-4} - \frac{x-503}{x-3}$ hozzárendeléssel egy függvényt.

a) Határozzuk meg az f függvény zérushelyeit.

b) Benne van-e az f értékkészletében a -417 ? Ha igen, akkor adjuk meg az értelmezési tartomány megfelelő elemeit.
(11 pont)

2. Egy folyóirat éves előfizetési díja 1750 Ft volt. A következő évre ezt megemelték 1800 Ft-ra.

a) Hány százalékos emelésről beszélhetünk?

Az igazsághoz az is hozzátartozik, hogy amikor olcsóbb volt a folyóirat, akkor öt jelent meg évente, 32, 32, 32, 32 és 28 oldalas terjedelemben. Amikor drágább lett, akkor évente csak négyet adtak ki, 36, 48, 40 és 44 oldalas terjedelemben.

b) Az előfizetők számára valójában milyen változást jelentett ez egy oldalra vonatkoztatva?

c) Mennyivel változott átlagosan egy folyóirat oldalszáma a vizsgált két évet összehasonlítva?

d) Adjuk meg mind a két évhez a megjelent folyóiratok oldalszámának szórását.

(13 pont)

3. Adott három pont a koordinátarendszerben:

$$A(980; -1), \quad B(981; 1), \quad C(2^{1986}; 2 \cdot 2^{1986}).$$

Az AB felezőpontjára tükrözve a C pontot kapjuk a D -t. Határozzuk meg az A, B, C és D pontok által meghatározott négyszög területét.
(13 pont)

4. Egy forgáskúp palástja olyan negyedkör, melynek sugara 10 cm.

a) Mekkora a kúp felszíne, térfogata?

b) A kúpot a magasság felénél, az alaplappal párhuzamos síkkal két részre vágjuk. Hogyan aránylik a két rész térfogata egymáshoz?
(14 pont)

II. rész

5. a) Igazoljuk, hogy az

$$a = \sqrt[3]{15 + 4\sqrt{14}} + \sqrt[3]{15 - 4\sqrt{14}}$$

gyöke az $x^3 - 3x - 30 = 0$ egyenletnek.

b) Igazoljuk, hogy az $x^3 - 3x - 18 = 0$ egyenletnek a

$$b = \sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$$

az egyedüli gyöke.

(16 pont)

6. Ibolya történelemórán a közvetett elnökválasztást egy elképzelt ország adatain keresztül mutatta meg tanítványainak:

Bergengóciát nyolc állam alkotja, ezért hivatalosan a neve United States of Bergengócia (röviden USB). Bergengóciában a választópolgárok két párt közül választhatnak, majd a pártok meghatározott számú elektorjai választják meg az elnököt a két párt egy-egy jelöltje közül. Minden államban az utolsó népszámlálás adatai alapján határozzák meg az elektorok számát. A most érvényben lévő adatokat a következő táblázat mutatja:

Állam neve	Választók száma	Elektorok száma
Aliforn	283 821	10
Lorida	234 171	9
Rizon	179 351	7
Olorad	38 021	3
Labama	28 221	3
Regon	26 991	3
Ebrasz	5 261	2
Laszka	4 171	2

Bergengócia lakói nagyon öntudatosak, így mindenki él a választójogával. Mindenki arra a pártra szavaz, amelynek az elektorjaitól a megfelelő elnököt reméli. Az a párt nyer, amelyik a legtöbb szavazatot kapja. Minden államban a megválasztott párt adja az összes elektort, és az elektorok ezek után szabadon választhatnak a két jelölt között (nem köti őket pártfegyelem). Minden államban az az elnökjelölt lesz a támogatott, aki az elektorok többségének szavazatát bírja, és ekkor az állam összes elektori támogatása erre a jelöltre száll. A legtöbb elektor által támogatott jelölt nyeri a választást.

- a) Hány választó él átlagosan USB egy-egy államban?
- b) Melyik államban kell a legtöbb, illetve a legkevesebb szavazat egy elektor megválasztásához?
- c) Az egyik elnökjelölt nyilatkozata szerint biztosan ő lesz a nyertes, mert három állam támogatását is biztosra veszi. Melyik három államra gondolhatott?
- d) Nyerhet-e valaki ezen a választáson, ha a választópolgároknak kevesebb, mint a 20%-a szeretne volna, hogy ő legyen az elnök? (16 pont)

7. Egy kabát ára 20 000 Ft volt eredetileg, de az áruház elkezdte kedvezményesen árusítani. Rövid időn belül egy újabb akció keretében 14 960 Ft lett az ára. Mind a két esetben az árengedmény százalékban kifejezve 10 és 20 közötti egész szám volt. László az első árengedmény után vásárolt egy kabátot. Mennyit fizethetett ekkor? (16 pont)

8. a) Egy derékszögű háromszög oldalhosszai egy mértani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 1 egység hosszú. Számítsuk ki a háromszög másik két oldalának hosszát.

b) Egy háromszög oldalhosszai egy mértani sorozat egymást követő tagjai, a legrövidebb oldala 1 egység hosszú. Tudjuk, hogy a háromszög nem szabályos. Igazoljuk, hogy a háromszögnek nincs 60° -os szöge. (16 pont)

9. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt, amelynek hozzárendelési szabálya $f(x) = x^3 + (p-4)x^2 + p^2x - 2$, ahol p egy valós paraméter.

a) Számítsuk ki a $\int_0^4 f(x) dx$ határozott integrál értékét, ha $p = 4$.

b) Határozzuk meg a p értékét úgy, hogy az $x = 2$ zérushelye legyen az f függvénynek.

c) Határozzuk meg azokat a p egész számokat, amelyekre az f függvény deriváltjának nincs zérushelye. (16 pont)

Számadó László