Teleszkopikus összegekről, avagy kalandozások egy versenyfeladat körül I.

1. Bevezetés

Középiskolai matematikaversenyeken gyakran előfordul, hogy egy-egy kitűzött feladat valójában speciális esete vagy éppen egyszerű következménye valamely általános tételnek. Mivel azonban az ilyen tételek rendszerint túlmutatnak a középiskolás tananyagon, és a megoldási útmutatóban általában nincs hely a részletezésükre, ezért a diákok és tanáraik csak ritkán ismerhetik meg az általánosításokat, valamint azok eredetét. Jelen írás célja éppen az, hogy középiskolás szinten bemutassa egy 2012. évi matematika versenyfeladat mögött rejlő elméleti és történeti érdekességeket. Figyelmünk középpontjában a teleszkopikus összegek állnak majd, amelyekhez kapcsolódóan számos hasznos fogalomra, illetve összefüggésre világítunk rá, és közben kiváló matematikusokat ismerünk meg. Kalandozásunk során a lehető legkevesebb előismeretre támaszkodunk, ezért minden előkerülő fogalomra és összefüggésre emlékeztetni fogunk. A cikk olvasásával így bárki megpróbálkozhat, de egyes részek akár órán vagy szakkörön is feldolgozhatók. A téma iránt mélyebben érdeklődők számára menet közben bőséges olvasnivalót ajánlunk, valamint a cikk jó néhány önálló gondolkodásra kitűzött feladatot szintén tartalmaz, amelyekhez útmutatást is adunk.

2. Kiindulás: egy 2012. évi OKTV feladat

Matematikatörténeti utazásunk kiindulópontja a 2011/2012. tanévi matematika Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny (OKTV) döntő fordulójának a II. kategóriában indulók, vagyis a nem speciális matematika tanterv szerint haladó gimnazisták számára kitűzött 3. feladata (lásd a [3] honlapot).

2.1. feladat (OKTV, 2011/2012). Legyen $h(1) = 1$ és $n = 2, 3, \ldots$ esetén $h(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Mutassuk meg, hogy

$$L = \frac{1}{h^2(1)} + \frac{1}{2 \cdot h^2(2)} + \frac{1}{3 \cdot h^2(3)} + \ldots + \frac{1}{2012 \cdot h^2(2012)} < 2.$$

Akadhat, aki még nem találkozott a $\sum$ jellel (görög nagy szigma betű), amelyet összegek tömör leírására (a $\ldots$ helyett) is használunk a következőképpen.

2.2. jelölés. Ha (a_n) egy tetszőleges valós számsorozat, akkor

$$\sum_{i=1}^{n} a_i := a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \tag{1}$$

amelyet úgy olvasunk, hogy „szumma $i = 1$-től n-ig a_i”. Természetesen i helyett bármilyen futóindexet használhatunk, mi a cikkben általában a k betűt fogjuk. Az (1) összeget a továbbiakban az (a_n) sorozat egy (méghozzá az n-edik) *részletösszegének* fogjuk nevezni.

Mielőtt az Olvasó továbbhaladna, érdemes egy kis időt szánnia az OKTV feladat önálló megoldására, vagy legalábbis a megoldáson való töprengésre. A hivatalos és egyben talán legelegánsabb megoldást az alábbiakban ismertetjük.

A megoldás ötlete, hogy egy olyan összeggel becsüljük felülről, más szóval *majoráljuk* L-et, amelyet meg tudunk adni zárt alakban. Ehhez vegyük észre, hogy mivel a $\big(h(n)\big)$ sorozat (szigorúan) monoton növő, azért $k \geq 2$ esetén

$$\frac{1}{kh^2(k)} \leq \frac{\frac{1}{k}}{h(k-1)h(k)} = \frac{h(k) - h(k-1)}{h(k-1)h(k)} = \frac{1}{h(k-1)} - \frac{1}{h(k)}. \tag{2}$$

Ezt $k = 2$-től n-ig összegezve kapjuk, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{kh^2(k)} \leq \left(\frac{1}{h(1)} \underbrace{- \frac{1}{h(2)}\right) + \left(\frac{1}{h(2)}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{h(3)}\right) + \left(\frac{1}{h(3)}}_{=0} - \frac{1}{h(4)}\right) + \ldots + \tag{3}$$

$$+ \left(\frac{1}{h(n-2)} \underbrace{- \frac{1}{h(n-1)}\right) + \left(\frac{1}{h(n-1)}}_{=0} - \frac{1}{h(n)}\right).$$

A (3) egyenlőtlenség jobb oldala egy úgynevezett *teleszkopikus összeg*, amelyben (a zárójelek elhagyásával) minden tag, az első és az utolsó kivételével, pozitív és negatív előjellel egyaránt szerepel, ezért kiesik, vagyis az összeg teleszkópszerűen (vagy gondolhatunk a zsebrádió antennájára) „összecsuklik". Következésképpen

$$\frac{1}{h^2(1)}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{kh^2(k)}\le\frac{1}{h^2(1)}+\frac{1}{h(1)}-\frac{1}{h(n)}<\frac{1}{h^2(1)}+\frac{1}{h(1)}=2 \tag{4}$$

minden $n\ge 2$ esetén, speciálisan $n=2012$ esetén is, amit bizonyítani akartunk. A (4) becslést röviden úgy is fogalmazhatjuk, hogy a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kh^2(k)}\qquad (n=1,2,\dots)$$

összegeknek a 2 egy felső korlátja.

2.3. definíció. Egy (a_n) valós számsorozatot *felülről korlátos*nak nevezünk, ha van olyan K valós szám, hogy $a_n\le K$ minden $n=1,2,\dots$ esetén. Ekkor K a sorozat egy *felső korlátja.* Hasonlóan, az (a_n) sorozat *alulról korlátos,* ha $a_n\ge k$ minden $n=1,2,\dots$ esetén. Ekkor k a sorozat egy *alsó korlátja.* Egy sorozatot *korlátosnak* mondunk, ha alulról és felülről is korlátos.

2.4. példa. Az $a_n=1-\dfrac{1}{n}$ sorozat egy felső korlátja az 1, az $a_n=n$ sorozat viszont felülről nem korlátos. Az $a_n=(-1)^n$ sorozat alulról és felülről is korlátos.

Még egy pillanatra visszatérve az OKTV feladat megoldására, szinte tálcán kínálkozik az általánosítás lehetősége. Gondoljuk meg, hogy a $\big(h(n)\big)$ sorozat helyett tetszőleges pozitív tagú (d_n) sorozat $D_n:=\sum_{k=1}^{n}d_k$ részletösszegei vehetők, hiszen ekkor is alkalmazható a (2) becslés $h(k)$ helyett D_k-val. Valójában a következő tételt igazoltuk a fentiekben.

2.5. állítás. *Legyen (d_n) tetszőleges pozitív tagú valós számsorozat és részletösszeg-sorozata $D_n:=\sum_{k=1}^{n}d_k$ $(n=1,2,\dots)$. Ekkor*

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_k^2}\le\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_{k-1}D_k}=\frac{1}{D_1}-\frac{1}{D_n}<\frac{1}{D_1}\qquad (n=2,3,\dots),$$

tehát a

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_k^2}\qquad (n=2,3,\dots) \tag{5}$$

összegek sorozata felülről korlátos (mégpedig $1/D_1$ egy felső korlátja).

2.6. *megjegyzés.* A 2.5. tételben a (d_n) sorozat pozitivitása helyett nyilván elegendő, hogy (d_n) nemnegatív tagú és $d_1=D_1>0$.

Mivel az (5) összegek sorozata felülről korlátos, és természetesen monoton növekedő is egyben, ezért a jól ismert tétel szerint (lásd az [1] könyv 1. kötetének 138. oldalát vagy a [2] könyv 40. oldalán a 15. feladatot) $n\to\infty$ esetén szükségképpen van határértéke, tehát konvergens (a cikkben csak néhány helyen kerül elő a konvergencia fogalma, ezért azok is nyugodtan folytathatják az olvasást, akik még nem hallottak róla; egyébként az [1, 2] könyvek részletesen foglalkoznak a határérték-számítás témakörével).

2.7. definíció. Legyen (a_n) tetszőleges valós számsorozat. Ha a

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k \tag{6}$$

határérték létezik és véges, tehát egy S valós szám, akkor azt mondjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *(végtelen) sor* konvergens, és összege S. A $\sum_{k=1}^{n}a_k$ összegeket a sor *részletösszegeinek* szokás hívni (ezzel egyenértékűen mi az (a_n) sorozat részletösszegei elnevezést is használjuk, ha ez nem okoz félreértést). Ha a (6) határérték valamelyik végtelennel egyenlő vagy nem létezik, akkor a sort *divergensnek* mondjuk.

2.8. *megjegyzés.* A 2.7. definíció előtt tett megállapításunk alapján, ha egy sor nemnegatív tagú, azaz $a_n\ge 0$ minden n-re, és részletösszegei felülről korlátosak, akkor a sor konvergens. Ez visszafelé is igaz, hiszen ha egy tetszőleges valós számsorozat, legyen az akár egy részletösszeg-sorozat, konvergens, akkor korlátos (lásd az [1] könyv 1. kötetének 125. oldalát).

2.9. példa. A $0+0+0+\dots$ sor konvergens és összege 0, hiszen a részletösszeg-sorozata az azonosan 0 sorozat, amelynek határértéke 0. Az $1+1+1+\dots$ sor divergens, mert n-edik részletösszege n, amely $n\to\infty$ esetén végtelenhez tart. Az $1-1+1-1+\dots$ sor $(2n+1)$-edik részletösszege 1, $2n$-edik részletösszege pedig 0, így a részletösszegek sorozatának $n\to\infty$ esetén nincs határértéke, tehát a sor divergens.

Látszólag az $1-1+2-2+3-3+4-4+\dots$ sor összege 0, „mert minden tag kiesik", azonban a részletösszeg-sorozata $1,0,2,0,3,0,\dots$, amelynek nyilván nincs határértéke, tehát a sor nem konvergens. Ez azt mutatja, hogy egy végtelen összeget általában nem zárójelezhetünk akárhogyan, mert ezáltal az összeg, sőt a konvergencia vagy divergencia ténye is megváltozhat.

Rögzített $q\neq 1$ valós számra az

$$1+q+q^2+q^3+\dots$$

úgynevezett *geometriai sor* n-edik részletösszege a geometriai sorozat első n tagjának összegképlete alapján

$$\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Mivel $|q|<1$ esetén $q^n\to 0$, így ekkor a geometriai sor konvergens, és

$$1+q+q^2+q^3+\dots=\frac{1}{1-q}\qquad(|q|<1).$$

(Gondoljuk meg, hogy az iménti képlet mit adna $q=-1$ esetén, ha érvényes lenne, az $1-1+1-1+\dots$ sor összegére.)

A továbbiakban célunk a 2.5. állítás messzemenő általánosítása. Ezzel kapcsolatban természetes módon vetődik fel a következő kérdés.

2.10. probléma. Legyen (d_n) tetszőleges pozitív tagú valós számsorozat és részletösszeg-sorozata $D_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}d_k$ $(n=1,2,\dots)$. Ekkor milyen α valós szám esetén lesz felülről korlátos a

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_k^{\alpha}}\qquad(n=2,3,\dots)\tag{7}$$

összegek sorozata?

A cikk további részében a 2.10. problémát teljesen megválaszoljuk, majd az eredmények néhány alkalmazását mutatjuk be. Látni fogjuk, hogy a problémához kapcsolódó kérdésekkel számos matematikus foglalkozott az elmúlt évszázadok folyamán.

3. Általánosítás, Pringsheim tétele

Kezdjük a 2.10. probléma talán legegyszerűbb esetével. Ha $\alpha\geq 2$, akkor $x=D_1/D_k\leq 1$ választással $x^{\alpha}\leq x^2$, ezért

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_k^{\alpha}}=\frac{1}{D_1^{\alpha}}\sum_{k=2}^{n}d_k\left(\frac{D_1}{D_k}\right)^{\alpha}\leq\frac{1}{D_1^{\alpha}}\sum_{k=2}^{n}d_k\left(\frac{D_1}{D_k}\right)^{2}=\frac{1}{D_1^{\alpha-2}}\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_k^{2}},$$

és így a 2.5. állításból következően

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_k^{\alpha}}\leq\frac{1}{D_1^{\alpha-2}}\left(\frac{1}{D_1}-\frac{1}{D_n}\right)<\frac{1}{D_1^{\alpha-1}},$$

vagyis a (7) összegek sorozata ismét felülről korlátos. Megmutatjuk, hogy a felülről korlátosság $\alpha>1$ esetén is érvényben marad. Sőt, ennél többet igazolunk, nevezetesen, minden $\beta>0$ esetén a

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_{k-1}^{\beta}D_k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{D_k-D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta}D_k}\qquad(n=2,3,\dots)\tag{8}$$

alakú összegek sorozata felülről korlátos. Ekkor $\beta=\alpha-1>0$ választással a

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_k^{\alpha}}=\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_k^{\alpha-1}D_k}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{d_k}{D_{k-1}^{\alpha-1}D_k}$$

becslésből következik a (7) összegek sorozatának $\alpha>1$ esetén való korlátossága.

A (8) összeg becsléséhez legyen p tetszőleges pozitív egész szám, amelyre $1/p\leq\beta$, és tegyük fel, hogy $d_1=D_1\geq 1$. Ekkor azt állítjuk, hogy

(9) $$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \le p\left(\frac{1}{D_{k-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{D_k^{\frac{1}{p}}}\right).$$

Valóban, az $u = D_{k-1}^{\frac{1}{p}}$ és $v = D_k^{\frac{1}{p}}$ jelölések bevezetésével $D_{k-1} \ge D_1 \ge 1$ és p választása folytán $D_{k-1}^{\beta} \ge u$, így

$$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \le \frac{v^p - u^p}{uv^p}.$$

A jobb oldalt szorzattá alakítva, majd $u \le v$ felhasználásával

$$\begin{aligned}\frac{v^p - u^p}{uv^p} &= \frac{(v-u)(v^{p-1} + v^{p-2}u + \ldots + vu^{p-2} + u^{p-1})}{uv^p} \le \\ &\le \frac{(v-u)pv^{p-1}}{uv^p} = p\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{v}\right),\end{aligned}$$

ahonnan a (9) egyenlőtlenség azonnal adódik. Tetszőleges $D_1 > 0$ esetén tekintsük a $\tilde{d}_k := d_k/D_1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ sorozatot, ekkor $\tilde{D}_k = D_k/D_1$, speciálisan $\tilde{d}_1 = \tilde{D}_1 = 1$, így érvényes a (9) becslés alábbi megfelelője:

$$\frac{\tilde{D}_k - \tilde{D}_{k-1}}{\tilde{D}_{k-1}^{\beta} \tilde{D}_k} \le p\left(\frac{1}{\tilde{D}_{k-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{\tilde{D}_k^{\frac{1}{p}}}\right).$$

Ebből egyszerű átalakítással nyerjük, hogy

(10) $$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \le \frac{p}{D_1^{\beta - \frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{D_{k-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{D_k^{\frac{1}{p}}}\right).$$

Visszatérve kiindulási célunkhoz, a (10) becslést alkalmazva végeredményben azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \le \sum_{k=2}^{n} \frac{p}{D_1^{\beta - \frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{D_{k-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{D_k^{\frac{1}{p}}}\right) = \frac{p}{D_1^{\beta - \frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{D_1^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{D_n^{\frac{1}{p}}}\right).$$

A fentiek alapján a 2.5. állítás következő általánosítását nyertük, amelyet Alfred Pringsheim (1850–1941) német matematikus igazolt 1890-ben.

3.1. tétel (Pringsheim, 1890). *Legyen (d_n) tetszőleges pozitív tagú valós számsorozat és részletösszeg-sorozata $D_n := \sum_{k=1}^{n} d_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Ekkor tetszőleges $\beta > 0$ szám esetén a*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^{1+\beta}} \qquad \textit{és} \qquad \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \qquad (n = 2, 3, \ldots)$$

összegek sorozatai felülről korlátosak. Sőt, tetszőleges $p \ge 1/\beta$ pozitív egész számra fennáll a következő becslés:

(11) $$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^{1+\beta}} \le \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_{k-1}^{\beta} D_k} \le \frac{p}{D_1^{\beta - \frac{1}{p}}}\left(\frac{1}{D_1^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{D_n^{\frac{1}{p}}}\right) < \frac{p}{D_1^{\beta}}.$$

3.2. *megjegyzés.* Alfred Pringsheim főként a valós és komplex analízis területén alkotott jelentőset, emellett művészettörténettel és zenével is foglalkozott.

Most rövid kitérőt teszünk, hogy egy kicsit több analízis segítségével a (9) egyenlőtlenségnél erősebbet igazoljunk, illetve a (7) összegekre közvetlenül, a (8) összegek nélkül is adjunk felső becslést. A következő rész eredményeit a későbbiekben nem használjuk, ezért első olvasásra kihagyhatók (a (15) összefüggésre azért érdemes rápillantani), és az Olvasó nyugodtan a 4. szakaszra ugorhat.

Megmutatjuk, hogy (9) helyett $0 < \beta \le 1$ esetén tetszőleges $D_1 > 0$ mellett

$$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_{k-1}^\beta D_k} \le \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{D_{k-1}^\beta} - \frac{1}{D_k^\beta}\right),$$

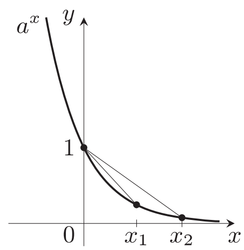
vagy ekvivalens módon

$$\frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{D_{k-1}}{D_k}\right)^\beta - 1\right] \le \frac{D_{k-1}}{D_k} - 1. \tag{12}$$

Mivel $D_{k-1} < D_k$, ezért elegendő igazolnunk, hogy rögzített $a < 1$ esetén az

$$f(x) := \frac{a^x - 1}{x} \qquad (x > 0)$$

függvény (szigorúan) monoton növő (nyilván $a = 1$ esetén is monoton növő), hiszen ekkor $a = D_{k-1}/D_k$ választással $\beta \le 1$ esetén $f(\beta) \le f(1)$, ami éppen a (12) egyenlőtlenség, és az is látható, hogy $\beta \ge 1$ esetén $f(\beta) \ge f(1)$.



1. ábra. a^x konvexitása

Vegyük észre, hogy $f(x)$ nem más, mint az a^x függvény grafikonjának a 0 és az x abszcisszájú pontjait összekötő húr meredeksége. Ez viszont x növelésével szigorúan monoton nő, ugyanis a^x szigorúan konvex függvény, ami éppen azt jelenti, hogy tetszőleges $[0, x]$ intervallumon a függvénygrafikon a végpontjait összekötő húr alatt fekszik (kivéve természetesen a végpontokat), lásd az *1. ábrát,* illetve konvex függvényekről bővebben az [1] könyv 1. kötetének 294–296. oldalait és a [2] könyv 208. oldalán a 33. feladatot.

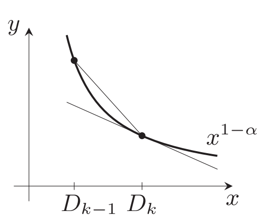
A konvexitás fogalmának segítségével az is megmutatható, hogy $\alpha > 1$ esetén

$$\frac{D_k - D_{k-1}}{D_k^\alpha} \le \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{D_{k-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{D_k^{\alpha-1}}\right). \tag{13}$$

Valóban, a $g(x) = x^{1-\alpha}$ $(x > 0)$ függvény bevezetésével a (13) egyenlőtlenség a

$$\frac{g(D_k) - g(D_{k-1})}{D_k - D_{k-1}} \le g'(D_k) \tag{14}$$

alakot ölti. Ez az egyenlőtlenség viszont következik a g függvény konvexitásából: g grafikonja bármely érintője fölött fekszik (kivéve nyilván az érintési pontot), így a D_k abszcisszájú pontba húzott érintő meredeksége (vagyis (14) jobb oldala) legalább akkora, mint a D_{k-1}, D_k abszcisszájú pontokat összekötő húr meredeksége (azaz (14) bal oldala), lásd a *2. ábrát.*



2. ábra. $x^{1-\alpha}$ konvexitása

A (13) becslés segítségével a (7) összegekre végül a

$$\sum_{k=2}^n \frac{d_k}{D_k^\alpha} \le \sum_{k=2}^n \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{D_{k-1}^{\alpha-1}} - \frac{1}{D_k^{\alpha-1}}\right) = \tag{15}$$

$$= \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{D_1^{\alpha-1}} - \frac{1}{D_n^{\alpha-1}}\right) < \frac{1}{(\alpha - 1)D_1^{\alpha-1}}$$

felső becslést nyerhetjük, amely $\alpha - 1 = 1/p$ esetén egybevág a 3.1. tétel (11) becslésével, különben pedig annál egy kissé erősebb.

4. Még tovább: Dini tétele

Hátravan még a (7) összeg vizsgálata a $0 < \alpha \le 1$ esetben. Mielőtt rátérnénk, vegyük észre, hogy

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} \le \sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_1^\alpha} = \frac{1}{D_1^\alpha}\sum_{k=2}^{n} d_k = \frac{D_n - D_1}{D_1^\alpha}.$$

Ez azt jelenti, hogy ha a (D_n) részletösszeg-sorozat felülről korlátos, akkor a (7) összegek sorozata is felülről korlátos *minden* α valós számra.

Ezentúl feltehető tehát, hogy a (D_n) részletösszeg-sorozat felülről nem korlátos. Megmutatjuk, hogy ekkor $0 < \alpha \le 1$ esetén a (7) összegek sorozata sem felülről korlátos. Ezt elég belátni az $\alpha = 1$ esetben, hiszen $x = D_1/D_k \le 1$ választással $0 < \alpha \le 1$ esetén $x^\alpha \ge x$, így

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} = \frac{1}{D_1^\alpha}\sum_{k=2}^{n} d_k \left(\frac{D_1}{D_k}\right)^\alpha \ge \frac{1}{D_1^\alpha}\sum_{k=2}^{n} d_k \frac{D_1}{D_k} = D_1^{1-\alpha}\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k}.$$

A nemkorlátosságot először egy speciális esetben igazoljuk, az általános eset bizonyítása pedig annak mintájára történik. Tekintsük tehát a speciális $d_k = 1$ $(k = 1, 2, \dots)$ konstans sorozatot, és legyen $\alpha = 1$. Ekkor $D_k = k$, így

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}.$$

A fenti összeg nemkorlátosságát már Nicole Oresme (1320 körül–1382) francia filozófus és matematikus (aki később Lisieux város püspöke is volt) 1350 körül belátta. Bizonyításának ötlete, hogy $n = 2^\ell$ választással ℓ növelésével tetszőlegesen nagy alsó becslést kaphatunk a következő módon:

$$\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{> \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{\ell-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^\ell}}_{> \frac{1}{2^\ell} + \dots + \frac{1}{2^\ell}} >$$
$$> \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \dots + 2^{\ell-1}\frac{1}{2^\ell} = \frac{\ell}{2}. \tag{16}$$

Az előbbi becslést nevezhetjük *kondenzációs* eljárásnak, amelynek lényege az egymás utáni tagok kondenzációja, más szóval sűrítése, összenyomása. Érdemes meggondolni, hogyan módosul a bizonyítás 2 hatványai helyett 10 hatványaival. A (16) egyenlőtlenségből, valamint annak ellenkező irányú párjából konkrét becslés nyerhetünk az első n pozitív természetes szám reciprokösszegére.

4.1. feladat. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2}[\log_2 n] + 1 \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \le [\log_2 n] + 1, \tag{17}$$

ahol $[x]$ az x egészrésze, vagyis a legnagyobb x-nél nem nagyobb egész szám.

4.2. *megjegyzés.* Ha egy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ sor konvergens, vagyis összege egy S valós szám, akkor

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \xrightarrow{n\to\infty} S - S = 0,$$

tehát $a_n \to 0$ a sor konvergenciájának szükséges feltétele. A (16) példa mutatja, hogy e feltétel nem elegendő, hiszen $1/n \to 0$, de a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens, mert részletösszegei felülről nem korlátosak.

Az általános esetben a (7) összegek $\alpha = 1$ mellett való nemkorlátosságának igazolása a (16) egyenlőtlenséghez hasonló alsó becsléssel (*minorálással*) történik. Először is rögzítsünk egy tetszőleges n_0 indexet. Ekkor

$$\frac{d_{n_0+1}}{D_{n_0+1}} + \frac{d_{n_0+2}}{D_{n_0+2}} + \dots + \frac{d_{n_0+n}}{D_{n_0+n}} \ge \frac{d_{n_0+1} + d_{n_0+n} + \dots + d_{n_0+n}}{D_{n_0+n}} =$$
$$= \frac{D_{n_0+n} - D_{n_0}}{D_{n_0+n}} = 1 - \frac{D_{n_0}}{D_{n_0+n}}. \tag{18}$$

Mivel a (D_n) sorozat felülről nem korlátos, ezért (a rögzített n_0-hoz) található olyan $n_1 > n_0$ index, hogy $D_{n_0}/D_{n_1} \le 1/2$, így a (18) egyenlőtlenségben $n = n_1 - n_0$ választással

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_1} \frac{d_k}{D_k} \ge \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Az előbbi gondolatmenetet n_0 helyett az n_1 indexszel végrehajtva hasonlóan nyerünk egy n_2 indexet úgy, hogy a (19) egyenlőtlenség mintájára

$$\sum_{k=n_1+1}^{n_2} \frac{d_k}{D_k} \geq \frac{1}{2}.$$

Az eljárást folytatva végül egy olyan (n_ℓ) indexsorozatot kapunk, amelyre

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_\ell} \frac{d_k}{D_k} = \sum_{k=n_0+1}^{n_1} \frac{d_k}{D_k} + \ldots + \sum_{k=n_{\ell-1}+1}^{n_\ell} \frac{d_k}{D_k} \geq \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = \frac{\ell}{2}.$$

Következésképpen a

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{20}$$

sorozat felülről nem korlátos. Vegyük észre, hogy a $d_k = 1$ speciális esetben Oresme bizonyításában (vagyis a (16) becslésben) éppen $n_\ell = 2^\ell$.

A kapott eredményt Pringsheim tételével és a (15) becsléssel, illetve a szakasz elején írottakkal összevetve Ulisse Dini (1845–1918) olasz matematikus egy 1867-es eredményét nyerjük, amellyel a 2.10. problémát teljesen megválaszoltuk.

4.3. tétel (Dini, 1867) *Legyen (d_n) tetszőleges pozitív tagú valós számsorozat, amelynek részletösszeg-sorozata $D_n := \sum_{k=1}^{n} d_k$ $(n = 1, 2, \ldots)$ felülről nem korlátos. Ekkor a*

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} \qquad (n = 2, 3, \ldots) \tag{21}$$

összegek sorozata $\alpha \leq 1$ esetén felülről nem korlátos, $\alpha > 1$ esetén felülről korlátos, méghozzá

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{d_k}{D_k^\alpha} < \frac{1}{(\alpha - 1) D_1^{\alpha-1}}.$$

Más szóval a

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_k}{D_k^\alpha}$$

sor $\alpha > 1$ esetén konvergens, $\alpha \leq 1$ esetén pedig divergens. Amennyiben a (D_n) részletösszeg-sorozat felülről korlátos, akkor a (21) összegek sorozata is felülről korlátos minden α valós szám esetén.

4.4. *megjegyzés.* Dini főként a valós egyváltozós függvények területén kutatott, az általánosítás és az ellenpéldák mestere volt. A 4.3. tételt az általunk közölt bizonyításoktól eltérő módon igazolta, és jelentősen általánosította.

Hivatkozások

[1] Pintér Lajos, *Analízis 1–2. (a gimnázium speciális matematika osztályai számára)*, Tankönyvkiadó (Budapest, 1987). (Újabb kiadás: TypoTEX, 2006.)

[2] Urbán János, *Határérték-számítás*, Műszaki Könyvkiadó (Budapest, 1975). (Újabb kiadás: 2006.)

Internetes oldal:

[3] Oktatási Hivatal: `http://www.oh.gov.hu`.

Besenyei Ádám

badam@cs.elte.hu