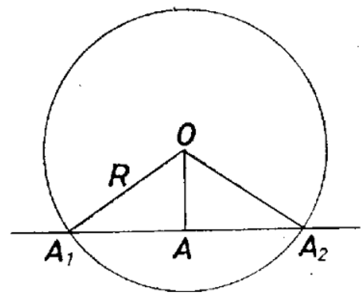
Jelöljük a gömb középpontját O-val, a mondott pontot P-vel, O-nak a három egyenesen való merőleges vetületét rendre A-val, B-vel, C-vel, a keresett négyzetösszeg negyedét N-nel. Jelöljük továbbá a gömbnek a PA egyenessel alkotott metszéspontjait A_1-gyel, A_2-vel, ekkor az A_1AO derékszögű háromszögben

$$\frac{1}{4}A_1A_2^2 = A_1A^2 = A_1O^2 - AO^2 = R^2 - AO^2,$$

ahol R a gömb sugara (1. ábra). A másik két húr hosszát hasonlóan számolva kapjuk, hogy

$$N = 3R^2 - (AO^2 + BO^2 + CO^2).$$

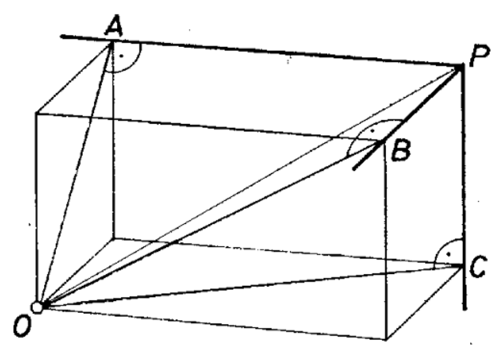


1. ábra

Az APO derékszögű háromszögben $AO^2 = PO^2 - AP^2$, a BPO, CPO derékszögű háromszögekben pedig $BO^2 = PO^2 - BP^2$, $CO^2 = PO^2 - CP^2$. Ezek alapján

$$N - 3R^2 - 3PO^2 + (AP^2 + BP^2 + CP^2) = 3R^2 - 2PO^2,$$

hiszen a P pontra támaszkodó, AP, BP, CP oldalú téglatestben PO testátló, így $PO^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2$ (2. ábra). Mivel N legutolsó alakjában már csak a pont és a gömb adatai szerepelnek, a feladat állítását igazoltuk.



2. ábra

Megjegyzés. Mivel $N > O$, ha P-ből húzhatók a gömbhöz páronként merőleges metsző egyenesek, akkor $R^2 > \frac{2}{3}PO^2$. Mivel ez éppen azt jelenti, hogy R nagyobb a PO testátlójú kocka lapátlóinál, a kapott feltétel elégséges is. Ha ugyanis $R^2 > \frac{2}{3}PO^2$, a PO testátlójú kocka P-vel szomszédos csúcsai a kocka bármely helyzetében a gömb belső pontjai, így a P-ből feléjük futó élek egyenesei valóban metszik a gömböt.