Megoldásvázlatok a 2012/2. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Amikor Jancsi célba ért a mezei futóversenyen, akkor a helyszíni riporter megkérdezte tőle, hogy hányadik helyen végzett. Jancsi így válaszolt: „Ha az előttem végzők fele mögöttem végzett volna, akkor mögöttem ötször annyian lettek volna, mint előttem. Ha viszont a mögöttem befutók harmada előttem végzett volna, akkor 6-tal többen végeztek volna előttem, mint mögöttem."*

Hány résztvevője volt a futóversenynek és hányadik helyen végzett Jancsi? (*12 pont*)

Megoldás. Legyen x a Jancsi előtt, és y a mögötte végzettek száma. Ekkor az első feltétel alapján:

$$y+\frac{x}{2}=5\cdot\left(x-\frac{x}{2}\right),\quad \text{azaz}\quad y=2x.$$

A második feltétel alapján:

$$y-\frac{y}{3}=x+\frac{y}{3}-6,\quad \text{azaz}\quad \frac{y}{3}=x-6.$$

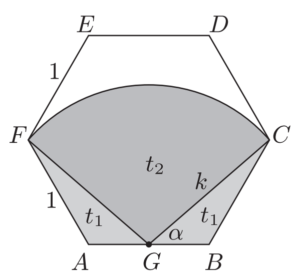
A két egyenletből kapjuk, hogy

$$\frac{2x}{3}=x-6,\quad \text{vagyis}\quad x=18.$$

Ezek szerint Jancsi előtt 18-an, mögötte 36-an végeztek. A versenyen résztvevők száma $18+1+36=55$. Jancsi a 19. helyen végzett.

2. Egy szabályos hatszög alakú rét egyik oldalának felezőpontjába szúrt karóhoz kikötöttünk egy kecskét. Hány százalékát legelheti le a kecske a rétnek, ha feszes kötél esetén pont el tud jutni a két szomszédos oldal távolabbi végpontjába? (*12 pont*)

Megoldás. Legyen az $ABCDEF$ szabályos hatszög egységnyi oldalú. Ekkor területe:



A kecske által elérhető területet két egybevágó háromszög és egy körcikk alkotja. Az AGF és a BGC háromszögek t_1 területe a trigonometrikus területképlet alapján:

$$t_1=\frac{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 120^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

Az AGF háromszögre a koszinusztételt alkalmazva:

$$k^2=1+\frac{1}{4}-2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 120^\circ=\frac{5}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4},\quad \text{ahonnan}\quad k=\frac{\sqrt{7}}{2}.$$

Az AGF háromszögben a szinusztételből:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 120^\circ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{7}},\quad \text{tehát}\quad \sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{3}{7}},\quad \text{ahonnan}\quad \alpha\approx 40{,}9^\circ.$$

Ezek szerint a körcikk FGC középponti szöge: $FGC=180^\circ-2\cdot 40{,}9^\circ=98{,}2^\circ$. Vagyis a körcikk t_2 területe:

$$t_2=\frac{k^2\pi}{360}\cdot 98{,}2\approx 1{,}5.$$

A kecske által elérhető rész T területe:

$$T=2t_1+t_2=\frac{\sqrt{3}}{4}+1{,}5\approx 1{,}933.$$

Tehát a kecske a rét $\dfrac{1{,}933}{2{,}598}\cdot 100\approx 0{,}744$-ed részét, azaz 74,4%-át tudja lelegelni.

3. Legyen az alaphalmaz az első n pozitív egész számot tartalmazó halmaz. Legyen az A halmaz a 3-mal osztható, a B halmaz a 4-gyel osztható, a C halmaz pedig az 5-tel osztható számok halmaza.

a) Véletlenszerűen kiválasztva egy számot, mekkora annak a valószínűsége, hogy az a megadott három halmaz egyikének sem eleme, ha $n = 100$?

b) Ha az $A \cap B \cap C$ halmaznak 2 eleme van, akkor hány eleme lehet az $(A \cap B) \setminus C$ halmaznak? (*13 pont*)

Megoldás. *a*) Az $A \cap B \cap C$ halmaznak csak 1 darab eleme van (ez a 60). Legyen az $A \cap B$ elemeinek száma x, a $B \cap C$ elemeinek száma y, az $A \cap C$ elemeinek száma pedig z.

Az A halmaz elemei a 100-nál nem nagyobb 3-mal osztható pozitív egész számok. Ezek egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, melynek első tagja 3, utolsó tagja 99, differenciája 3, tehát $99 = 3 + (n-1) \cdot 3$, ahonnan $n = 33$. Tehát az A halmaznak 33 eleme van.

Hasonlóképpen kapjuk, hogy a B halmaznak 25, a C halmaznak pedig 20 eleme van. Ezek szerint a felhasznált számok száma:

$$33 + 25 + 20 - (x + y + z) + 1.$$

Az $A \cap B$ halmazba a 12-vel osztható számok tartoznak:

$$A \cap B = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96\}.$$

Tehát ennek a halmaznak 8 eleme van, azaz $x = 8$.

A $B \cap C$ halmazba a 20-szal osztható számok tartoznak:

$$B \cap C = \{20, 40, 60, 80, 100\}.$$

Tehát ennek a halmaznak 5 eleme van, azaz $y = 5$.

A $A \cap C$ halmazba a 15-tel osztható számok tartoznak:

$$A \cap C = \{15, 30, 45, 60, 75, 90\}.$$

Tehát ennek a halmaznak 6 eleme van, azaz $z = 6$.

Ezek szerint a felhasznált számok száma: $33 + 25 + 20 - (8 + 5 + 6) + 1 = 60$. Így azon számok száma, melyeket egyetlen halmazba sem soroltunk be, 40.

A keresett valószínűség: $\dfrac{40}{100} = 0{,}4$.

b) Ha az $A \cap B \cap C$ halmaznak 2 eleme van, akkor azok csak a 60 és a 120 lehetnek. Az $(A \cap B) \setminus C$ halmazba a 12-vel osztható, 180-nál kisebb, n-nél nem nagyobb, pozitív egész számok tartoznak, kivéve a 60-at és a 120-at. Ezek szerint: $12 \le 12k < 180$, ahol k egész szám, de $k \neq 5$, $k \neq 10$. A k lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9 (ezek mindenképpen), 11, 12, 13, 14 (ezek az n értékétől függően). Vagyis az $(A \cap B) \setminus C$ halmaz elemeinek száma 8, 9, 10, 11 vagy 12 lehet.

4. A MÁV statisztikai adatai szerint az utazók 8%-a bliccel (azaz érvényes jegy nélkül utazik).

a) Egy vagonban 24 utas tartózkodik. Mekkora annak az esélye, hogy a jegyellenőr talál bliccelőt a vagonban?

b) Hány utas esetén lesz legalább 90% annak az esélye, hogy a jegyellenőr talál bliccelőt a vagonban? (*14 pont*)

Megoldás. *a*) Annak a valószínűsége, hogy egy utas bliccel, 0,08, így annak a valószínűsége, hogy egy utasnak van érvényes jegye, 0,92. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a jegyellenőr nem talál bliccelőt. Ennek valószínűsége: $0{,}92^{24} \approx 0{,}1352$. Annak a valószínűsége, hogy a 24 utas között találunk bliccelőt: $1 - 0{,}1352 = 0{,}8648$.

Tehát kb. 86,5% annak az esélye, hogy a 24 utas között találunk bliccelőt.

b) Ha annak az esélye legalább 90%, hogy az ellenőr talál bliccelőt a vagonban, az egyben azt is jelenti, hogy annak az esélye, hogy nem talál bliccelőt, 10%-nál kisebb. Ha ez n utasra teljesül, akkor $0{,}92^n < 0{,}1$.

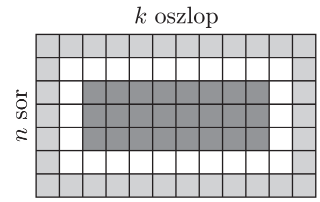
Vegyük az egyenlőtlenség mindkét oldalának 10-es alapú logaritmusát: $\lg 0{,}92^n < \lg 0{,}1$, azaz $n \cdot \lg 0{,}92 < \lg 0{,}1$. Mivel $\lg 0{,}92 < 0$, azért

$$n > \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}92} \approx 27{,}62.$$

Tehát ha $n \ge 28$, akkor már legalább 90% annak az esélye, hogy az ellenőr talál bliccelőt a vagonban.

II. rész

5. *Egy egységnyi négyzetekből álló négyzetrács n sorból és k oszlopból áll. A négyzetrács szélével érintkező négyzetek száma (az* ábrán *világosszürke), a négyzetrács szélével érintkező négyzetekkel érintkező négyzetek száma (az* ábrán *fehér), és a négyzetrács belsejében levő négyzetek száma (az* ábrán *sötétszürke) egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Határozzuk meg n és k értékét.* (*16 pont*)



Megoldás. A feltételekből következik, hogy $n > 4$ és $k > 4$. A négyzetrács szélén levő négyzetek száma: $a_1 = 2k + 2n - 4$. A szélével érintkező négyzetekkel érintkező négyzetek száma: $a_2 = 2(k-2) + 2(n-2) - 4 = 2k + 2n - 12$. Az összes többi négyzetek száma: $a_3 = (k-4)(n-4)$.

A számtani sorozat differenciája: $a_2 - a_1 = -8$. Ezek szerint:

$$a_3 - a_2 = (k-4)(n-4) - 2k - 2n + 12 = -8,$$

azaz $kn - 6n - 6k + 36 = 0$, ahonnan $(k-6)(n-6) = 0$. Ez akkor és csak akkor teljesül, ha $k = 6$ vagy $n = 6$.

Ezek szerint a feladat feltételei akkor teljesülnek, ha a négyzetrács valamelyik oldala 6, a másik pedig tetszőleges, 4-nél nagyobb pozitív egész szám.

6. Milyen pozitív egész n-re teljesül, hogy a $\dfrac{3\sqrt{n}+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-\sqrt{n}}$ tört értéke pozitív egész szám?

(*16 pont*)

Megoldás. Legyen k az a pozitív egész szám, melyre

$$\frac{3\sqrt{n}+\sqrt{3}}{4\sqrt{3}-\sqrt{n}} = k, \quad \text{azaz}$$

$$3\sqrt{n}+\sqrt{3} = 4k\sqrt{3} - k\sqrt{n},$$

$$\sqrt{n}\cdot(3+k) = \sqrt{3}\cdot(4k-1),$$

$$\frac{4k-1}{3+k} = \sqrt{\frac{n}{3}}.$$

A bal oldalon egy racionális szám szerepel. A jobb oldal akkor és csak akkor lesz racionális, ha a négyzetgyök alatt egy racionális szám négyzete szerepel, azaz $n = 3r^2$ alakú, ahol r egy pozitív egész szám. Ekkor $\dfrac{4k-1}{3+k} = r$. Alakítsuk át a bal oldalt a következő módon:

$$\frac{4k-1}{3+k} = \frac{4k+12-13}{3+k} = \frac{4k+12}{3+k} - \frac{13}{3+k} = 4 - \frac{13}{3+k}.$$

Ez akkor és csak akkor lesz egész szám, ha $3+k$ osztója 13-nak, azaz $3+k = 1$, -1, 13 vagy -13. Ezen esetek közül csak $3+k = 13$ esetén adódik k-ra pozitív egész érték. Vagyis $k = 10$. Ezzel $\dfrac{39}{13} = \sqrt{\dfrac{n}{3}}$, ahonnan $n = 27$.

7. A Budapest–Zürich nemzetközi gyorsvonat szerelvénye 12 vagonból áll: 4 db 1. osztályú, 6 db 2. osztályú vagon, valamint egy étkezőkocsi és egy poggyászkocsi.

a) Hányféleképpen alakulhat a kocsik sorrendje oly módon, hogy az 1. osztályú kocsik is és a 2. osztályú kocsik is egymás mögött legyenek, és az étkezőkocsi ne legyen a szerelvény utolsó vagonja?

b) Az egyik vagonban 8 tudós utazott, akik közül néhányan már ismerték egymást. Az egyik tudós (legyen a neve A) mindenkit ismert a társaságból. Három olyan tudós volt közöttük, akik A-n kívül senki mást nem ismertek, míg a többi négy ismerte egymást. Kézfogással bemutatkoztak azok, akik nem ismerték egymást. Hány kézfogás történt? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A 4-féle kocsit (étkező-, poggyász-, 1. osztályú, 2. osztályú kocsi) 4!-féleképpen rakhatjuk sorba. E permutációk bármelyike $6!\cdot 4!$-féleképpen valósulhat meg, hiszen az 1. osztályú kocsikat 4!-féleképpen, a 2. osztályú kocsikat pedig 6!-féleképpen állíthatjuk sorba.

Ezek szerint a sorbarendezések száma: $4!\cdot 4!\cdot 6!$. Ebből viszont még le kell vonnunk azokat az eseteket, amikor az étkezőkocsi a szerelvény utolsó vagonja. Ez összesen $3!\cdot 4!\cdot 6!$-féleképpen lehetséges.

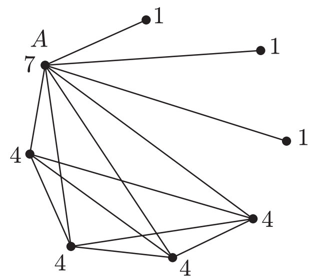
Tehát minden feltételt figyelembe véve a vagonok sorrendjének a száma:

$$4!\cdot 4!\cdot 6! - 3!\cdot 4!\cdot 6! = 3!\cdot 4!\cdot 6!\cdot(4-1) = 311\,040.$$

b) Szemléltessük egy *gráffal* az ismeretségeket. Írjuk a gráf minden csúcsa mellé a fokszámát. Az A tudósnak megfelelő csúcs fokszáma 7. Mivel 3 olyan személy van, akik A-n kívül senkit sem ismernek, azért e három csúcs fokszáma 1. A további négy személy tagjai kölcsönösen ismerik egymást, ezért a nekik megfelelő csúcsok fokszáma 4.

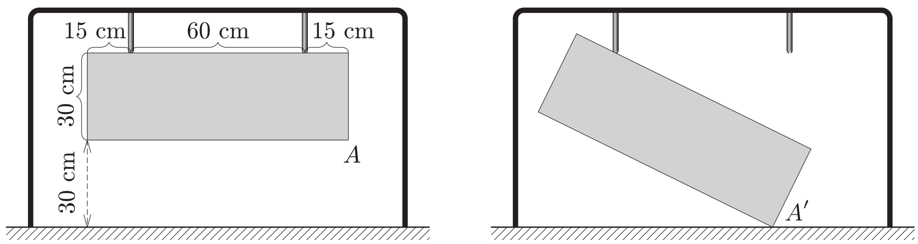
Ezek szerint a fokszámok összege:

$$7+1+1+1+4+4+4+4 = 26.$$



Mivel a gráf éleinek száma a fokszámok összegének a fele, azért a gráfnak 13 éle van. A kézfogások száma a hiányzó élek számával egyenlő. Mivel a 8 pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ és a gráfnak 13 éle van, azért a hiányzó élek (vagyis a kézfogások) száma $28 - 13 = 15$.

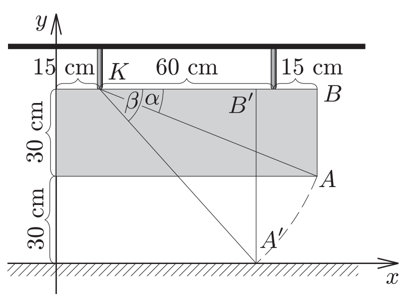
8. Egy étterem bejárata előtt, vízszintes talajon egy fémkeretre függőleges rudakat hegesztettek, majd a rudakra csavarozott táblán hirdették a napi menüt. Egy idő után az egyik csapágy eltört (lásd *ábra),* és így a tábla a földre billent.



a) Határozzuk meg a tábla A csúcspontjának billenés utáni A' helyzetét a földön.

b) Hány fokkal fordult el a tábla a billenés következtében? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Helyezzük el az *ábrát* egy koordinátarendszerbe. Legyen az x tengely a talaj, az y tengely pedig illeszkedjen a tábla bal oldali, függőleges széléhez. Billenéskor a tábla az épen maradt rúd K végpontja körül forog. Így az A pont egy olyan kör mentén forog, melynek középpontja K, sugara pedig a KA szakasz hossza. Ami a valóságban 10 cm, az a koordinátarendszerben legyen 1 egység. Vagyis $K(1{,}5; 6)$, a kör sugara: $AK = \sqrt{7{,}5^2 + 3^2} = \sqrt{65{,}25}$.



A kör egyenlete:

$$(x - 1{,}5)^2 + (y - 6)^2 = 65{,}25.$$

Az A' pont a körnek az x tengellyel való metszéspontja. Ezt megkapjuk, ha a kör egyenletébe $y = 0$-t helyettesítünk. Ekkor

$$(x - 1{,}5)^2 + 36 = 65{,}25, \quad \text{azaz} \quad (x - 1{,}5)^2 = 29{,}25,$$
$$x - 1{,}5 = \sqrt{29{,}25}, \quad \text{vagy} \quad x - 1{,}5 = -\sqrt{29{,}25}.$$

Innen: $x_1 = 1{,}5 + \sqrt{29{,}25} \approx 6{,}9$, $x_2 \approx -3{,}9$. A negatív gyök nyilván érdektelen, így azt kaptuk, hogy $x \approx 6{,}9$.

Tehát az A' pont a földön az eredetileg még ép tábla bal oldali függőleges egyenesétől kb. 69 cm-re van.

b) Billenéskor az elfordulás szöge az *ábrán* az $AKA'\sphericalangle = BKA'\sphericalangle - BKA\sphericalangle = \beta - \alpha$. α értékét a BKA derékszögű háromszögből kaphatjuk meg (most már cm-ekben számolva):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB}{BK} = \frac{30}{75} = 0{,}38, \quad \text{ahonnan} \quad \alpha \approx 21{,}8^\circ.$$

A' vetülete KB-re legyen B'. Így β értékét az $B'KA'$ derékszögű háromszögből kaphatjuk meg:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{A'B'}{B'K} = \frac{60}{69 - 15} = \frac{60}{54} \approx 0{,}84, \quad \text{ahonnan} \quad \beta \approx 48^\circ.$$

Tehát a tábla a billenés következtében $48 - 21{,}8 = 26{,}2$ fokkal fordult el.

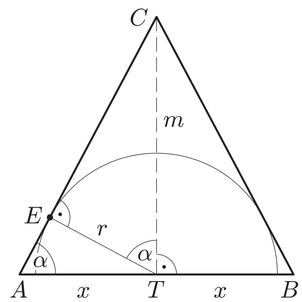
9. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja körül olyan félkört rajzoltunk, mely érinti a háromszög szárait. Mekkorák a háromszög szögei, ha a félkör területe a háromszög területének a lehető legnagyobb százalékát teszi ki? (*16 pont*)

Megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Ha a háromszög alapon fekvő szöge α, akkor $ETC\sphericalangle = \alpha$, hiszen $EAT\sphericalangle$ és $ETC\sphericalangle$ merőleges szárú hegyesszögek.

Az EAT derékszögű háromszögben $\sin\alpha = \frac{r}{x}$, ahonnan $x = \frac{r}{\sin\alpha}$. Az ETC derékszögű háromszögben $\cos\alpha = \frac{r}{m}$, ahonnan $m = \frac{r}{\cos\alpha}$.

A háromszög területe:

$$T_{ABC} = \frac{2xm}{2} = xm = \frac{r^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$



A félkör területe: $T_{\text{félkör}} = \frac{r^2\pi}{2}$. A félkör és a háromszög területének hányadosa az α hegyesszög függvényében:

$$H(\alpha) = \frac{\frac{r^2\pi}{2}}{\frac{r^2}{\sin\alpha\cos\alpha}} = \frac{\pi}{2}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Ennek akkor lehet szélsőértéke, ha a deriváltja 0.

$$H'(\alpha) = \frac{\pi}{2}\cdot\left[(\sin\alpha)'\cos\alpha + (\cos\alpha)'\sin\alpha\right] = \frac{\pi}{2}\cdot\left[\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right] = 0.$$

Mivel α hegyesszög, azért $\sin\alpha = \cos\alpha$, ahonnan $\alpha = 45^\circ$. A kapott érték valóban szélsőérték és maximum, hiszen $\alpha < 45^\circ$ esetén $H'(\alpha) > 0$, $\alpha > 45^\circ$ esetén pedig $H'(\alpha) < 0$.

Vagyis a keresett háromszög szögei: 45°, 45°, 90°.

Megjegyzés. Természetesen, az addíciós tételek ismeretében a következő átalakítással, deriválás nélkül is ugyanehhez az eredményhez juthattunk volna:

$$H(\alpha) = \frac{\pi}{2}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\pi}{4}2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\pi}{4}\sin 2\alpha.$$

Gerőcs László
Budapest