# A 2011. évi WILLIAM LOWELL PUTNAM verseny feladatai[1]

**A1**. Nevezzük *növekvő spirálnak* a koordinátasík azon $P_0 = (0,0), P_1, \ldots, P_n$ egész koordinátájú pontsorozatait, amelyekre $n \geq 2$ és:

- A $P_0P_1, P_1P_2, \ldots, P_{n-1}P_n$ irányított szakaszok rendre az egymást követő koordináta-irányokba mutatnak: keletre ($P_0P_1$ esetén), északra, nyugatra, délre, keletre, és így tovább.
- A szakaszok hozza pozitív és szigorúan növekvő.

[Ábra nélkül.] Hány olyan $0 \leq x \leq 2011$, $0 \leq y \leq 2011$ egész koordinátájú $(x, y)$ pont van, amely *nem lehet* egy növekvő spirál utolsó, $P_n$ pontja?

**A2.** Legyenek $a_1, a_2, \ldots$ és $b_1, b_2, \ldots$ olyan pozitív valós számokból álló sorozatok, amelyekre $a_1 = b_1 = 1$ és $b_n = b_{n-1}a_n - 2$, ahol $n = 2, 3, \ldots$ . Tegyük fel, hogy a $(b_j)$ sorozat korlátos. Bizonyítsuk be, hogy

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_1 \ldots a_n}$$

konvergens, és számítsuk ki az $S$ értékét.

**A3.** Adjunk meg egy olyan $c$ valós számot és egy olyan $L$ pozitív számot, amelyekre

$$\lim_{r \to \infty} \frac{r^c \displaystyle\int_0^{\pi/2} x^r \sin x \, dx}{\displaystyle\int_0^{\pi/2} x^r \cos x \, dx} = L.$$

**A4.** Mely $n$ pozitív egészekre létezik olyan egész elemekből álló $n \times n$-es mátrix, amelyre minden sornak az önmagával vett skaláris szorzata páros, de bármely két különböző sor skaláris szorzata páratlan?

**A5.** Legyenek $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan differenciálható függvények a következő tulajdonságokkal:

- Minden $u \in \mathbb{R}$ esetén $F(u, u) = 0$;
- Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $g(x) > 0$ és $x^2 g(x) \leq 1$;
- Minden $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ esetén a $\nabla F(u, v)$ vektor vagy $\mathbf{0}$, vagy párhuzamos a $\big\langle g(u), -g(v) \big\rangle$ vektorral.

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $C$ konstans, amelyre minden $n \geq 2$ és valamely $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}$ esetén

$$\min_{i \neq j} \big| F(x_i, x_j) \big| \leq \frac{C}{n}.$$

**A6.** Legyen $G$ $n$ elemű kommutatív csoport, és legyen a

$$\{g_1 = e, g_2, \ldots, g_k\} \subsetneqq G$$

olyan (nem feltétlenül minimális) halmaz, amelynek elemei különbözők és generálják a $G$ halmazt. Egy speciális dobókocka véletlenszerűen kiválasztja a $g_1, g_2, \ldots, g_k$ elemek egyikét, egyenlő valószínűségekkel. A kockával egymás után $m$-szer dobva, a kapott elemeket összeszorozva kapjuk a $g \in G$ elemet. Bizonyítsuk be, hogy van olyan $b \in (0, 1)$ valós szám, amelyre

$$\lim_{m \to \infty} \frac{1}{b^{2m}} \sum_{x \in G} \left( \operatorname{Prob}(g = x) - \frac{1}{n} \right)^2$$

pozitív és véges.

[1] A versenyről megjelent ismertetés lapunk 2005/2. számában olvasható, a 71–72. oldalon. A verseny honlapja: `http://math.scu.edu/putnam/index.html`, a megoldások a `http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml` honlapon találhatók.

**B1.** Legyenek $h$ és $k$ be pozitív egészek. Bizonyítsuk be, hogy minden $\varepsilon > 0$ esetén léteznek olyan $m$ és $n$ pozitív egészek, amelyekre

$$\varepsilon < \left|h\sqrt{m} - k\sqrt{n}\right| < 2\varepsilon.$$

**B2.** Legyen $S$ azon prímszámokból álló $(p, q, r)$ rendezett számhármasok halmaza, amelyekre legalább egy $x$ racionális szám kielégíti a $px^2 + qx + r = 0$ egyenletet. Mely prímek fordulnak elő hét vagy több $S$-beli számhármasban?

**B3.** Legyenek $f$ és $g$ olyan (valós értékű) függvények, melyeknek értelmezési tartománya a 0-t tartalmazó nyílt intervallum. Legyen továbbá $g$ a 0 helyen folytonos és nem nulla. Ha $fg$ és $f/g$ differenciálhatók a 0 helyen, következik-e, hogy $f$ is differenciálható a 0 helyen?

**B4.** Egy bajnokságban 2011 játékos mérkőzik meg egymással. A 2011 játékos 2011-szer találkozik, mindannyian egyszerre játszanak a többiek ellen. A játszmában minden játékos vagy nyer, vagy veszít. A verseny állását két $2011 \times 2011$-es mátrixban tartják nyilván: $T = (T_{hk})$ és $W = (W_{hk})$. Kezdetben $T = W = 0$. Minden $(h, k)$ esetén ha egy játszmában a $h$ és $k$ játékosok döntetlent játszottak (vagyis mindkettő nyert vagy mindkettő veszített), akkor a $T_{hk}$ mátrixelem nő 1-gyel, ha pedig $h$ játékos nyert és $k$ játékos veszített, akkor $W_{hk}$ 1-gyel nő és $W_{kh}$ 1-gyel csökken.
Bizonyítsuk be, hogy a bajnokság végén $\det(T + iW)$ értéke $2^{2010}$-nel osztható nemnegatív egész szám.

**B5.** Legyenek $a_1, a_2, \ldots$ valós számok. Tegyük fel, hogy létezik olyan $A$ konstans, hogy minden $n$-re

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + (x - a_i)^2} \right)^2 dx \le An.$$

Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan $B > 0$ konstans, hogy minden $n$-re

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left(1 + (a_i - a_j)^2\right) \ge Bn^3.$$

**B6.** Legyen $p$ páratlan prím. Mutassuk meg, hogy ha $n$ a $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ halmaz eleme, akkor $n$ értékei közül legalább $(p+1)/2$ esetben $\sum_{k=0}^{p-1} k!n^k$ nem osztható $p$-vel.