

Megoldásvázlatok a 2011/7. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. Adjuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:

a) $(x + 500)^2 = 252\,012 - 1011x$;

b) $\lg^2 x + 2011 \cdot \lg x - 2012 = 0$;

c) $x + 2011\sqrt{x-7} - 2019 = 0$.

(11 pont)

Megoldás. a) Végezzük el a négyzetre emelést és rendezzük nullára az egyenletet:

$$x^2 + 2011x - 2012 = 0.$$

A gyökök és együtthatók közötti összefüggés alkalmazásával vagy megoldóképlettel ($x_1 + x_2 = -2011$, $x_1 x_2 = -2012$) gyorsan megkapható, hogy $x_1 = 1$, $x_2 = -2012$.

b) Az egyenlet $\lg x$ -re másodfokú, az értelmezési tartománya: $x > 0$. A két lehetséges érték $\lg x$ -re a) megoldása alapján: $(\lg x)_1 = 1$, $(\lg x)_2 = -2012$. Vagyis: $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-2012}$. Mindkettő megoldása az egyenletnek, mert benne van az értelmezési tartományban.

c) Az értelmezési tartomány: $x \geq 7$. A következő alakban is írhatjuk a megadott egyenletet:

$$x - 7 + 2011\sqrt{x-7} - 2012 = 0.$$

Másodfokú egyenletet kaptunk $\sqrt{x-7}$ -re. A két lehetséges érték $\sqrt{x-7}$ -re: $(\sqrt{x-7})_1 = 1$, $(\sqrt{x-7})_2 = -2012$. Az első esetben $x = 8$, a második esetben nincs megfelelő x . Az $x = 8$ megoldása az egyenletnek, mert benne van az értelmezési tartományban.

2. Egy mértani sorozat első eleme 2. Ha a sorozat második elemét 20-szal csökkentjük, a harmadik elemét pedig az első kettő elé írjuk, akkor egy számtani sorozat három, egymást követő tagját kapjuk. Adjuk meg az eredeti három számot. (12 pont)

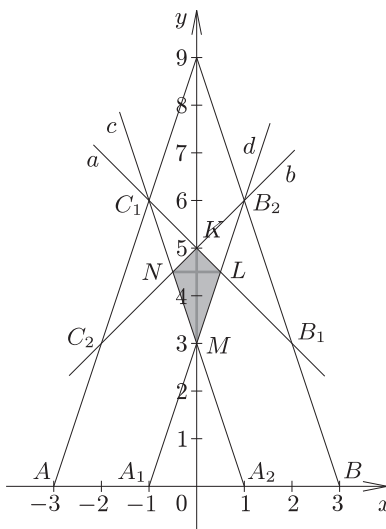
Megoldás. Legyen a mértani sorozat hányadosa q , ekkor a feladatban szereplő három tag: 2 ; $2q$; $2q^2$. A szöveg alapján a $2q^2$; 2 ; $2q - 20$ egy számtani sorozat három, egymást követő tagja lesz, azaz: $2 - 2q^2 = 2q - 20 - 2$. Rendezéssel a $0 = q^2 + q - 12$ másodfokú egyenletet kapjuk, amelyből: $q_1 = 3$, $q_2 = -4$.

Két megfelelő számhármast találtunk. Megoldás a 2 ; 6 ; 18 , illetve a 2 ; -8 ; 32 .

3. Az ABC egyenlőszárú háromszögben $AB = 6$, $CF = 9$, ahol F az AB alap felezőpontja. Az A csúcstól indulva és a körüjárás irányát tartva az oldalakon a harmadoló pontok: A_1 , A_2 , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 . Mekkora a C_1B_1 , C_2B_2 , C_1A_2 , A_1B_2 egyenesek által meghatározott négyszög területe? (14 pont)

Megoldás. Az ABC háromszöget tegyük koordináarendszerbe a következő módon: $A(-3; 0)$, $B(3; 0)$, $C(0; 9)$. A feladatban szereplő harmadoló pontok koordinátáit is meg tudjuk adni: $A_1(-1; 0)$, $A_2(1; 0)$, $B_1(2; 3)$, $B_2(1; 6)$, $C_1(-1; 6)$, $C_2(-2; 3)$.

A harmadoló pontok ismeretében a megfelelő egyenesek egyenlete felírható, hiszen minden kérdéses egyenes két pontjával adott.



A C_1 és a B_1 pontokra illeszkedő a egyenes egyenlete: $y = -x + 5$.

A C_2 és a B_2 pontokra illeszkedő b egyenes egyenlete: $y = x + 5$.

Az A_2 és a C_1 pontokra illeszkedő c egyenes egyenlete: $y = -3x + 3$.

Az A_1 és a B_2 pontokra illeszkedő d egyenes egyenlete: $y = 3x + 3$.

Meghatározzuk a megfelelő metszéspontok koordinátáit.

Az a és b metszéspontja: $K(0; 5)$.

A c és d metszéspontja: $M(0; 3)$.

Az a és d metszéspontja: $L\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

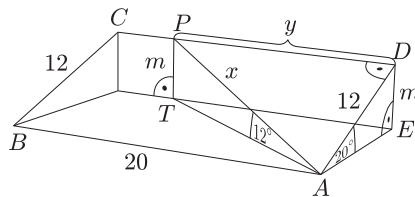
Az ábra szimmetriája miatt

a c és b metszéspontja: $N\left(-\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right)$. A szimmetria miatt $KLMN$ négyszögről belátható, hogy deltoid.

Csúcsainak ismeretében az átlók hossza: $KM = 2$, $NL = 1$. Vagyis a kérdéses terület: $t_{KLMN} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$.

4. Az $ABCD$ téglalap alakú 20° -os emelkedő alsó, vízszintes, 20 méter hosszúságú AB oldalának az A csúcsából egy egyenes mentén szeretnénk feljutni a CD oldal valamely pontjába. Ezeknek a párhuzamos oldalaknak 12 méter a távolsága. Hová érkezhetünk, ha az útvonal vízszintessel bezárt hajlásszöge nem haladhatja meg a 12° -ot? (14 pont)

Megoldás. A szöveg alapján készítsünk ábrát.



Az AED derékszögű háromszögben $\sin 20^\circ = \frac{m}{12}$, azaz $m = 12 \cdot \sin 20^\circ \approx 4,10$.

Az ATP derékszögű

háromszögben $\sin 12^\circ = \frac{m}{x} = \frac{4,1}{x}$, azaz $x = \frac{4,1}{\sin 12^\circ} \approx 19,72$.

Végül az ADP derékszögű háromszögben

$$y = \sqrt{x^2 - 12^2} = \sqrt{19,72^2 - 12^2} \approx 15,65.$$

Vagyis ha $DP \geq 15,65$ m, akkor AP vízszintessel bezárt hajlásszöge nem nagyobb, mint 12° .

II. rész

5. Tekintsük a $K(5; 2)$ középpontú, $r = 3$ egység sugarú k kört. Az origóból az e_1 és az e_2 érintők húzhatók a k körhöz.

a) Írjuk fel e_1 és e_2 egyenletét.

b) Mekkora szöget zár be egymással e_1 és e_2 ?

c) Mekkora területű az a síkidom, amelynek pontjaiból a k kör 60° -nál nem kisebb, 90° -nál pedig nem nagyobb szögben látható? (16 pont)

Megoldás. a) A k kör egyenlete: $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 9$. Az origóra illeszkedő egyenesek egyenlete: $y = mx$. Ezek közül az lesz az érintő, amelynek a körrel pontosan egy közös pontja van. Tehát az

$$\left. \begin{aligned} (x - 5)^2 + (y - 2)^2 &= 9, \\ y &= mx \end{aligned} \right\}$$

paraméteres egyenletrendszerben azokat az m paramétereket keressük, amelyekre az egyenletrendszernek csak egyféle megoldása van.

Végezzük el a behelyettesítést:

$$\begin{aligned} (x - 5)^2 + (mx - 2)^2 &= 9, \\ x^2 - 10x + 25 + m^2x^2 - 4mx + 4 &= 9, \\ (m^2 + 1)x^2 - (4m + 10)x + 20 &= 0. \end{aligned}$$

A keresett m értékeket akkor kapjuk, ha a fenti paraméteres másodfokú egyenletben:

$$D = (4m + 10)^2 - 80(m^2 + 1) = 0,$$

$$16m^2 + 80m + 100 - 80m^2 - 80 = 0,$$

$$16m^2 - 20m - 5 = 0.$$

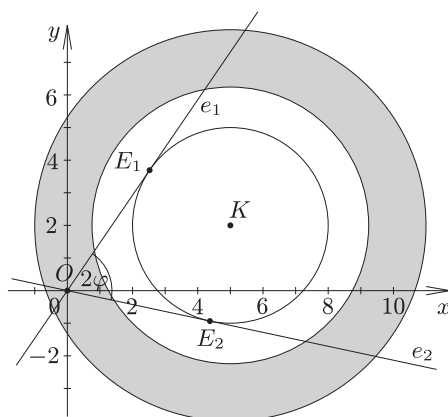
$$m_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 320}}{32} = \frac{20 \pm \sqrt{720}}{32} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{8}.$$

A keresett két érintő egyenlete: $e_1: y = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{8}x$, $e_2: y = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{8}x$.

b) Legyen az e_1 érintőn E_1 , az e_2 érintőn E_2 az érintési pont. A két érintő hajlásszöge az E_1OE_2 -nél, ami az OKE_1 derékszögű háromszög O -nál lévő φ hegyesszögnek a kétszerese. Az origó és a K középpont távolságát ki tudjuk számolni: $OK = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$. Tudjuk, hogy $E_1K = 3$, ezért $\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{29}}$.

Ebből kapjuk: $\varphi \approx 33,85^\circ$, a hajlásszög pedig: $2\varphi \approx 67,7^\circ$.

Megjegyzés. A hajlásszöget természetesen a két meredekség ismeretében is meg tudnánk határozni, most azonban egy olyan gondolatmenetet láttunk, amely nem épült az előző kérdésre adott válaszra.



c) Ha egy P pontból a kör 60° -os szögben látható, jelölje R_1 a P -ből húzott egyik érintő érintési pontját. Ekkor a KPR_1 derékszögű háromszögben $KR_1 = 3$, $KP = 6$. Vagyis az ilyen P pontok halmaza egy K középpontú, 6 sugarú körvonal lesz.

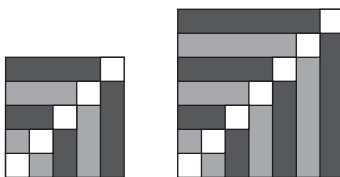
Ha egy Q pontból a kör 90° -os szögben látható, jelölje T_1 a Q -ből húzott egyik érintő érintési pontját. Ekkor a KQT_1 derékszögű háromszögben $KT_1 = 3$, $KQ = 3\sqrt{2}$. Vagyis az ilyen Q pontok halmaza egy K középpontú, $3\sqrt{2}$ sugarú körvonal lesz.

A megfelelő pontok e két körvonal által meghatározott körgyűrű pontjai lesznek.

Ezek szerint a terület: $(36 - 18) \cdot \pi = 18\pi$.

6. Miskolcon a Tiszai pályaudvar várótermének kövezéséhez az ábrán látható burkolólapokat is használták. Ezekon a lapokon egy ötször ötös négyzethálót színezték három színnel (sötétzöld, világoszöld, fehér).

Ezt a mintát jobbra és felfelé tovább folytathatjuk, és bármely ötnél nagyobb páratlan számhoz elkészíthetjük az ábra színezését. Lerajzoltuk az így készített hétszer hetes négyzethálót is.



a) Hányadrésze lesz világoszöld az 51 egység oldalú négyzetnek?

b) Hányadrésze lesz sötétzöld a 101 egység oldalú négyzetnek?

c) Igazoljuk, hogyha a négyzet oldalhosszát minden határon túl növeljük, akkor mind a világoszöld, mind a sötétzöld részek területe a négyzet területének a feléhez tart. (16 pont)

Megoldás. a) Az 51 egység oldalú négyzet 51^2 , azaz 2601 területű. A világoszöld téglalapok területe sorban: 1, 3, 5, 7, ..., 49. Mindegyikből kettő van, ezért területük összege: $2(1+3+5+\dots+49) = 2 \cdot 25^2 = 1250$. (Felhasználtuk, hogy az első 25 pozitív páratlan szám összege 25^2 .)

Vagyis az $\frac{1250}{2601} \approx 0,480\ 58$ része lesz világoszöld az 51 egység oldalú négyzetnek.

b) A 101 egység oldalú négyzet 101^2 , azaz 10 201 területű. A sötétzöld téglalapok területe sorban: 2, 4, 6, 8, ..., 100. Mindegyikből kettő van, ezért területük összege:

$$2(2 + 4 + 6 + \dots + 100) = 4(1 + 2 + 3 + \dots + 50) = 4 \cdot \frac{50 \cdot 51}{2} = 5100.$$

Vagyis az $\frac{5100}{10201} \approx 0,499\ 95$ része lesz sötétzöld a 101 egység oldalú négyzetnek.

c) A $2n + 1$ egység oldalú négyzet $(2n + 1)^2$ területű, ahol n tetszőleges 1-nél nagyobb pozitív egész számot jelöl. A világoszöld téglalapok területe sorban: 1, 3, ..., $(2n - 1)$. Mindegyikből kettő van, ezért területük összege:

$$2 \cdot [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] = 2 \cdot n^2.$$

A következő értéket kell meghatároznunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(2n + 1)^2}.$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket és alkalmazzuk a határértékre megismert tulajdonságokat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{(2n + 1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2}{4n^2 + 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0,5.$$

A sötétzöld téglalapok területe sorban: 2, 4, 6, ..., $2n$. Mindegyikből kettő van, ezért területük összege:

$$2(2 + 4 + \dots + 2n) = 4(1 + 2 + \dots + n) = 4 \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2} = 2n(n + 1).$$

Most a következő értéket kell meghatároznunk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n + 1)}{(2n + 1)^2}.$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket és alkalmazzuk a határértékre megismert tulajdonságokat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n + 1)}{(2n + 1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 2n}{4n^2 + 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n}}{4 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} = 0,5.$$

Ezzel mindkét esetben igazoltuk az állítást.

7. A $[0; 4]$ -on értelmezett $f(x) = \frac{x^2}{16} + 1$ hozzárendeléssel adott függvény képét megforgatjuk az x tengely körül. Az így kapott felület egy olyan forgástest alakú edény palástját adja, melynek az alja a kisebb kör. A koordinátarendszer egysége a valóságban 1 dm-t jelent.

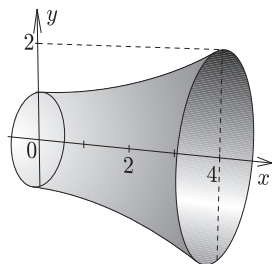
a) Hány literes az edény, ha falvastagságát elhanyagolhatónak vehetjük?

b) Az edény aljának középpontjában áll egy elhanyagolható vastagságú egyenes pálcá. Ezt a pálcát úgy döntjük el, hogy az alsó vége nem mozdul el. Milyen magasságban érinti a pálcá az edény falát? (16 pont)

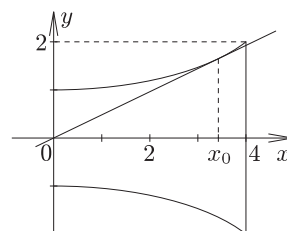
Megoldás. a) A $[0; 4]$ -on értelmezett $f(x) = \frac{x^2}{16} + 1$ hozzárendeléssel adott függvény forgatásával kapott forgástest térfogata (1. ábra):

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{16} + 1 \right)^2 dx = \pi \int_0^4 \left(\frac{x^4}{256} + \frac{x^2}{8} + 1 \right) dx = \pi \left[\frac{x^5}{1280} + \frac{x^3}{24} + x \right]_0^4 = \\ &= \pi \left(\frac{4^5}{1280} + \frac{4^3}{24} + 4 - \frac{0^5}{1280} - \frac{0^3}{24} - 0 \right) = \frac{52\pi}{15} \approx 23,5. \end{aligned}$$

Az edény kb. 23,5 literes.



1. ábra



2. ábra

b) A rajz a forgástengelyre illeszkedő keresztmetszetet mutatja az eldöntött pálcával (2. ábra). A kérdéses magasság legyen x_0 .

Írjuk fel az origóból az f függvényhez húzható érintő egyenletét. Az origóra illeszkedő egyenesek egyenlete: $y = mx$ (most $m > 0$), az f függvény görbéjének

$$\text{egyenlete: } y = \frac{x^2}{16} + 1.$$

$$\text{A behelyettesítés után kapjuk: } mx = \frac{x^2}{16} + 1,$$

$$0 = x^2 - 16mx + 16, \quad D = 256m^2 - 64 = 0.$$

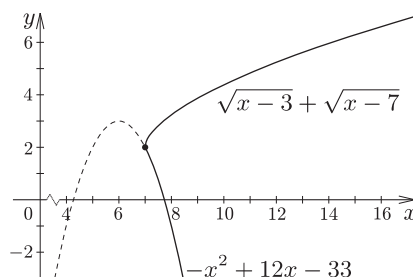
Minden feltételnek az $m = \frac{1}{2}$ felel meg, vagyis a keresett érintő egyenlete: $y = \frac{x}{2}$. Ez az érintő a $(4; 2)$ koordinátájú pontban érinti az f függvény képét.

Vagyis $x_0 = 4$. (Ez az edény felső peremének magassága.)

8. Oldjuk meg a $-x^2 + 12x - 33 = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-7}$ **egyenletet.** (16 pont)

Megoldás. A feladat értelmezési tartománya: $x \geq 7$. Alakítsuk át a bal oldalon látható másodfokú kifejezést:

$$-x^2 + 12x - 33 = -(x^2 - 12x + 33) = -[(x-6)^2 - 3] = -(x-6)^2 + 3.$$



Ebben az alakban már könnyen megállapítható, hogy az $x = 6$ maximum helye ennek a kifejezésnek, és a $[6; \infty)$ -on szigorúan monoton csökkenő, vagyis a feladat értelmezési tartományán is az.

Mivel a $\sqrt{x-3}$ és a $\sqrt{x-7}$ szigorúan monoton növekedő, azért az összegük is az. Az értelmezési tartomány legkisebb elemére, az $x = 7$ -re a bal oldal helyettesítési értéke:

$$-x^2 + 12x - 33 = -7^2 + 12 \cdot 7 - 33 = 2,$$

a jobb oldal helyettesítési értéke:

$$\sqrt{x-3} + \sqrt{x-7} = \sqrt{7-3} + \sqrt{7-7} = 2.$$

Az egyenlőség miatt az $x = 7$ megoldása az egyenletnek. Több megoldás a fent elmondottak miatt nincs.

9. Egy háromszögben ismerjük mindhárom oldal hosszát és mindhárom szög nagyságát. Mutassuk meg, hogy ezeket az értékeket az

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma}$$

képletbe behelyettesítve a háromszög területét kapjuk.

(16 pont)

Megoldás. A megadott képletet alakítsuk a következő módon:

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{\text{ctg } \alpha + \text{ctg } \beta + \text{ctg } \gamma} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma}\right)}.$$

A koszinusz-tételt alkalmazva: $\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Ugyanígy felírhatjuk $\cos \beta$ és $\cos \gamma$ értékét is:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Vagyis:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma}{\sin \gamma} \right)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\sin \alpha} + \frac{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{\sin \beta} + \frac{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\sin \gamma} \right)} = \\ & = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4 \cdot \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc \sin \alpha} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac \sin \beta} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab \sin \gamma} \right)} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{a^2+b^2+c^2}{4} \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{4t} + \frac{a^2+c^2-b^2}{4t} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4t} \right)} = \\ & = \frac{t(a^2 + b^2 + c^2)}{(b^2 + c^2 - a^2) + (a^2 + c^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2)} = \frac{t(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2 + b^2 + c^2} = t. \end{aligned}$$

Valóban a háromszög területét adja ez a képlet.