A 2010–2011. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai

I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Az x valós számra teljesül, hogy

$$16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} = 10.$$

Határozza meg $\sin x$ értékét!

2. A valós számok halmazán egy új műveletet definiálunk. Bármely a; b valós számpárra legyen

$$a \triangle b = 2a + 3b.$$

Milyen feltételeknek kell teljesülnie az a; b; c valós számhármas tagjaira, ha fennáll, hogy

$$a \triangle (b \triangle c) = (a \triangle b) \triangle c?$$

3. Egy derékszögű háromszög oldalhosszainak összege 84, az oldalak hosszának négyzetösszege 2738. Határozza meg a beírt kör sugarának hosszát!

4. Mely pozitív p prímszámokra teljesül, hogy 360 osztója a $p^4 - 5p^2 + 4$ kifejezésnek?

5. Határozza meg az a számjegyet úgy, hogy a tízes számrendszerbeli

$$N = \underbrace{999\ldots9}_{100 \text{ db}}\, a\, \underbrace{000\ldots0}_{100 \text{ db}} 9$$

alakú szám egy egész szám négyzete legyen!

6. Igazolja, hogy ha valamely háromszög területe $\frac{1}{2}$ területegység, akkor kerülete 3 hosszúságegységnél nagyobb!

Második forduló

1. Öt pozitív egész szám egy számtani sorozat első öt eleme. A sorozatnak a különbsége prímszám. Tudjuk, hogy az első négy szám köbének összege megegyezik az ezen öt tag közül vett páros sorszámú tagok összegének a 150-szeresével. Továbbá azt is tudjuk, hogy az utolsó négy tag köbének összege az öt tag közül vett páratlan sorszámú tagok összegének a 224-szerese. Adja meg ezt az öt számot!

2. Adott egy kör, amelynek egyenlete $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 45 = 0$.
a) Bizonyítsa be, hogy a kör minden pontja az első koordináta-negyedbe esik!
b) Legyenek a körön levő P pontok koordinátái x és y. Képezzük a P pontok koordinátáiból a $k = \frac{y}{x}$ hányadosokat! Mennyi k maximuma és a kör melyik pontjában veszi ezt föl?

3. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!

$$2x + 3y + |x + y - 2| = 5,$$

$$x^2 + 4xy + 4y^2 = 5x + 11y - 7.$$

4. Adottak a k_1; k_2; k_3 egymást páronként kívülről érintő körök. Az érintési pontjaik legyenek: $P = k_1 \cap k_3$, $Q = k_1 \cap k_2$ és $R = k_2 \cap k_3$. A PQ egyenes k_2 körrel való másik metszéspontja A és k_3-mal C. Az AR egyenes a k_3 kört B-ben is metszi. Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög derékszögű!

5. Igazolja, hogy ha $a > 0$, $b > 0$ valós számok és $a \neq b$, akkor:
a)

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b};$$

b) továbbá, hogy az

$$\frac{1}{1802} + \frac{1}{1803} + \ldots + \frac{1}{2010} > \frac{1}{10}$$

egyenlőtlenség teljesül!

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}+\dots$$
$$+\frac{1}{\sqrt{x+2010}+\sqrt{x+2011}}=1.$$

2. Egy ládában almák vannak, amelyek közül néhány megromlott. Ha kiemelünk 11 hibás almát, akkor az eredetihez képest felére tudjuk csökkenteni annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kivéve egy almát, a kivett alma hibás legyen. Hány jó alma lehetett a ládában?

3. Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlóinak metszéspontja P. Legyen az APB, illetve CPD háromszögek területe T_1, illetve T_3! Az $ABCD$ négyszög T területére teljesül, hogy $T=\left(\sqrt{T_1}+\sqrt{T_3}\right)^2$. Igazolja, hogy az $ABCD$ négyszög trapéz!

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Határozzuk meg az $f(x)$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét, ha $-4\le x\le 4$.

$$f(x)=16-x^2-6\sqrt{16-x^2}.$$

2. Keressük meg mindazon pozitív egész a és b számokat, amelyekre az alábbi négy állítás közül három igaz, egy pedig hamis:
i) $a+1$ osztható b-vel;
ii) $a=2b+5$;
iii) $a+b$ osztható 3-mal;
iv) $a+7b$ prímszám.

3. Oldjuk meg a természetes számok körében:

$$3^{2x-1}=x^{9-2x}-5.$$

4. Adott a síkon egy O pont és a belőle induló két félegyenes, melyek hegyesszöget zárnak be. Ugyanezen sík egy P pontjának a félegyenesekre eső merőleges vetületei a félegyenesek belsejébe eső P_1 és P_2 pontok. Határozzuk meg azon P pontok halmazát (mértani helyét), amelyekre P_1P_2 szakasz hossza állandó.

5. Egy urnában 3 piros, 4 fehér és 5 zöld golyó van. Visszatevés nélkül kivesszük egyesével sorban mindet. Mennyi a valószínűsége, hogy legalább két fehéret húzunk egymás után?

Második forduló

1. Egy tetraéder éleire valós számokat írtunk úgy, hogy a kitérő élekre írt számok összege ugyanannyi legyen. Ezután minden csúcshoz hozzárendeltük az oda befutó élekre írt számok összegét. Ezek az összegek valamilyen sorrendben az a, b, c és d számok, amelyekre $a=b=2c=2d$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy az élekre írt számok között a 0 szám is előfordul.

2. Tekintsük az $y=x^2$ parabolát. Keressük meg az összes olyan egész meredekségű egyenest, ami áthalad a $P(0;4)$ ponton és a parabolába eső szakasza egész hosszúságú.

3. Keressük a 2010-nél nagyobb egészek közt a legkisebb olyan S számot, amelyet elosztva a 3, 4, 5, 6, 7 és 8 számokkal, maradékul kétszer kapjuk az 1, 2, 3 számok mindegyikét.

4. Igazoljuk, hogy a t területű $ABCD$ konvex négyszög akkor és csak akkor téglalap, ha

$$(AB+CD)(AD+BC)=4t.$$

Harmadik (döntő) forduló

1. Legyen $f_1(x)=-\dfrac{2x+7}{x+3}$ és $f_{n+1}(x)=f_1\big(f_n(x)\big)$, ha $x\ne-3$ és $x\ne-2$. Határozzuk meg $f_{2010}(2011)$ értékét.

2. Jelölje az $\{1,2,\dots,n\}$ halmaz azon részhalmazainak számát r_n, amely nem tartalmaz szomszédos számokat, ahol az 1-et és az n-et is szomszédosnak tekintjük. Határozzuk meg r_{16} értékét. Igazoljuk, hogy az $\{r_n\}$ sorozat hármas maradékai periódikusan ismétlődnek, ha $n\ge 2$ és határozzuk meg a sorozat periódusát.

3. Az ABC háromszög köré írt körhöz A-ban és B-ben húzott érintők metszéspontja legyen D. Az ABD háromszög köré írt köre az AC egyenest és a BC szakaszt másodszor rendre az E és F pontokban metszi. Legyen CD és BE metszéspontja G. Határozzuk meg a $BG : GE$ arányt, ha $BC : BF = 2 : 1$.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Egy 2010×2010-es táblázat mezőibe úgy akarunk (nem feltétlenül különböző) egész számokat beírni, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege különböző legyen (azaz 4020 különböző összeget kapjunk). Legkevesebb hányféle szám beírásával tudjuk ezt elérni?

2. Legyen $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$. Igazolja, hogy

$$x_1(1 - x_1) + (x_2 - x_1)(1 - x_2) + (x_3 - x_2)(1 - x_3) + \ldots$$

$$\ldots + (x_n - x_{n-1})(1 - x_n) < \frac{1}{2}.$$

3. Keresse meg az összes olyan p prímszámot, melyhez léteznek olyan a, b, c egész számok, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = p$ és $\left(a^4 + b^4 + c^4\right)$ osztható p-vel.

4. Egy n-elemű H halmaznak kiválasztottuk néhány k-elemű részhalmazát ($3 \leq k \leq n$) úgy, hogy H bármely két elemét pontosan három darab, bármely három elemét pontosan két darab kiválasztott részhalmaz tartalmazza. Határozza meg n és k lehetséges értékeit.

5. (a) Tükrözzük az ABC háromszög A csúcsát B-re, B-t C-re és C-t A-ra. Igaz-e, hogy ha a tükörképek alkotta háromszög szabályos, akkor az eredeti háromszög is szabályos?

(b) Tükrözzük az $ABCD$ tetraéder A csúcsát B-re, B-t C-re, C-t D-re és D-t A-ra. Igaz-e, hogy ha a tükörképek alkotta tetraéder szabályos, akkor az eredeti tetraéder is szabályos?

Második (döntő) forduló

1. Az ABC derékszögű háromszög C csúcsából induló magasságának talppontja az AB átfogón D. A B csúcsból induló szögfelező a CD magasságot az E, az AC befogót az F pontban metszi. Igazoljuk, hogy $|AD| > 2 \cdot |EF|$.

2. Van-e olyan pozitív egész, amelynek pozitív osztói között 2011-szer annyi négyzetszám van, mint köbszám?

3. Anna és Bálint a következő játékot játsszák: Anna rajzol egy tetszőlegesen nagy üres (azaz él nélküli) gráfot, majd egyesével behúz tetszőleges éleket, amelyeket Bálint közvetlenül a behúzás után kékre vagy pirosra színez. További szabály, hogy az így keletkező gráfban minden csúcs foka legfeljebb k lehet, és k értékében előre megállapodnak. Melyik az a legkisebb k, amely mellett Anna ügyes játékkal mindenképpen létre tud hozni egy 2011 hosszúságú egyszínű utat?