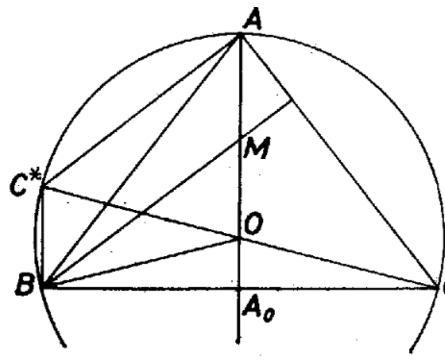
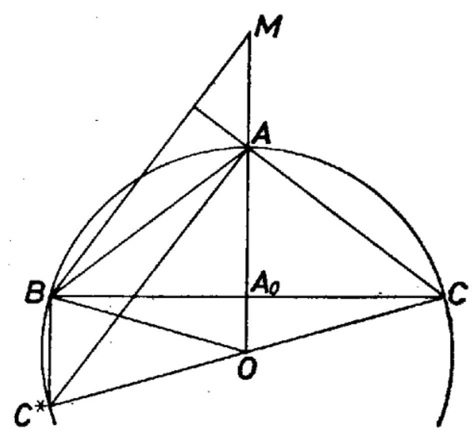
I. megoldás. Mivel $OA=1$, azért $\cos MOA\sphericalangle$ „hossza" az OA' szakasz előjellel vett hosszát jelenti, ahol A' az A csúcs vetülete az OM egyenesen, a pozitív irányt O-tól M felé választva. Így azt kell belátnunk, hogy hasonló jelölésekkel

$$OA'+OB'+OC'=OM. \tag{1}$$

Megjegyezzük, hogy szabályos háromszögben M egybeesik O-val – és semmilyen más háromszögben nem –, ott nincs értelme az állításnak.



1. ábra



2. ábra

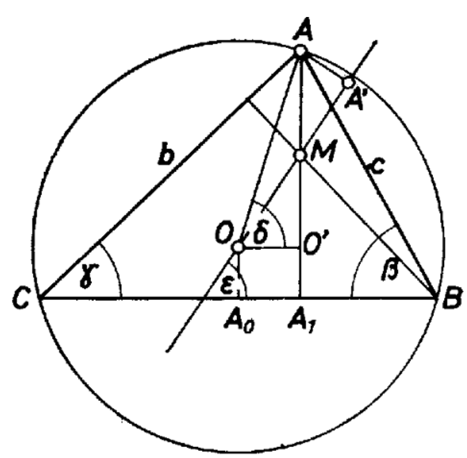
Célszerű az egyenlő szárú háromszögeket is külön elintézni, ilyenekben az OM egyenes maga a szimmetriatengely. Legyen $AB=AC(\neq BC)$, a kör C-vel átellenes pontja C^*, és a BC oldal felezőpontja A_0; így B' és C' egybeesik A_0-lal, A' pedig A-val, tehát mindjárt $OA'=OA$. Az MAC^*B négyszög paralelogramma – ez az $AB\neq AC$ esetben is igaz –, mert 2–2 oldala merőleges CB-re, illetve CA-ra, ezért – az irányt most is beleértve –

$$MA=BC^*=2A_0O=-2OA_0=-(OB'+OC'),$$

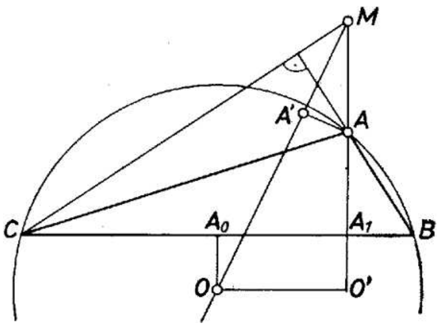
és ezekkel (1) bal oldala így alakul

$$OA'+(OB'+OC')=OA-MA=OM,$$

és ezt akartuk megmutatni (1. és 2. ábra)



3. ábra



4. ábra

Az általános esetre térve, a 3. és 4. ábrán úgy választottuk a betűzést, hogy teljesült az $AC = b > c = AB$ nagyságviszony, tehát $\beta > \gamma$ is. Legyen A vetülete BC-re A_1, és O vetülete AA_1-re O'. Az MOA látószöget az OA, OM egyenesek CB-hez való δ, ε hajlásszögeinek különbségeként határozzuk meg. Az elsőre

$$\delta = 90° - OAA_1\sphericalangle = 90° - (CAA_1\sphericalangle - CAO\sphericalangle) = \, = \gamma + \frac{180° - COA\sphericalangle}{2} = 90° - (\beta - \gamma).$$

A másikra, mindjárt a föntebbiek felhasználásával és átalakításokkal, ismert azonosságok alapján

$$\cos\varepsilon = \frac{OO'}{OM} = \frac{\cos\delta}{OM} = \frac{\sin(\beta-\gamma)}{OM}, \quad \text{és}$$
$$\sin\varepsilon = \frac{O'M}{OM},$$

ahol

$$O'M = A_1A - A_10' - MA = c\sin\beta - 3A_0O = 2\sin\gamma\sin\beta - 3\cos\alpha =$$
$$= \cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma) + 3\cos(\beta+\gamma). \tag{2}$$

Ezekkel

$$OA' = OA\cos(\delta-\varepsilon) = \frac{1}{OM}\big(\sin^2(\beta-\gamma) + \cos^2(\beta-\gamma) + 2\cos(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma)\big) =$$
$$= \frac{1}{OM}(1 + \cos 2\beta + \cos 2\gamma).$$

Mondjuk ki ehhez mindjárt: OA' „érzéketlen” a bevezetett $\beta > \gamma$ nagyságviszonyra, tehát megfelelő betűcserékkel hasonló kifejezést írhatunk fel OB'-re és OC'-re.

Ezekkel a bizonyítandó (1) a következő alakot veszi föl:

$$3 + 2(\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) = OM^2 = O'O^2 + O'M^2. \tag{3}$$

Itt a jobb oldal a (2) és $O'O = \sin(\beta-\gamma)$ alapján, valamint a legutóbbi alakításokat megismételve

$$\sin^2(\beta-\gamma) + \cos^2(\beta-\gamma) + 4\cos(\beta-\gamma)\cos(\beta+\gamma) + 4\cos^2\alpha =$$
$$= 1 + (2\cos 2\beta + 2\cos 2\gamma) + (2 + 2\cos 2\alpha),$$

vagyis egyenlő (3) bal oldalával. Ezzel az állÍtást minden háromszögre bebizonyítottuk, hacsak M nem azonos O-val.

Megjegyzés. A (3) bal oldalának alakításaival az OM távolságra az alábbi kifejezéseket is fölírhatjuk:

$$\left(\frac{OM}{r}\right)^2 = 4\cdot\sum^3 \cos^2\alpha - 3 = 9 - \sum^3 \sin^2\alpha = 1 - 8\prod^3 \cos\alpha,$$

ahol $\sum^3$ a 3 db $\cos^2\alpha$ „típusú” tag összegének kiírását rövidíti, $\prod^3$ pedig a 3 db $\cos\alpha$ „típusú” tényező szorzatának kiírását; ilyenféle rövidítéseket inkább a fizikában szokás alkalmazni.

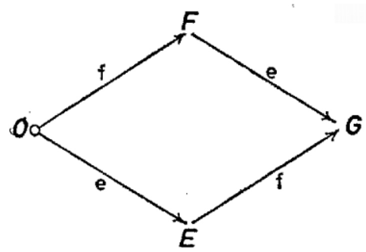
II. megoldás: Helyezzünk koordináta–rendszert az ábránkra úgy, hogy az origója O legyen, és M az x tengely pozitív felére essék. Ebben a koordináta–rendszerben az I. megoldásban használt (1) összefüggés azt jelenti, hogy az $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ vektorok első koordinátáinak összege egyenlő $\overrightarrow{OM}$ első koordinátájával. Megmutatjuk, hogy ennél több is igaz, nevezetesen

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM}. \tag{1*}$$

Helyezzük az $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ összeg kezdőpontját O-ba, és jelöljük ebben a helyzetben a végpontját M^*-gal. Ekkor

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OM^*},$$

így (1*) azt jelenti, hogy M^* azonos M-mel



5. ábra

Legyenek **e** és **f** tetszőleges irányú, egységnyi nagyságú vektorok, legyen O a közös kezdőpontjuk, a végpontjuk pedig E és F. Toljuk át f kezdőpontját E-be, új helyzetében a végpontja legyen G. Ekkor (5. ábra)

$$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EG}=\mathbf{e}+\mathbf{f},$$

hiszen két vektor összeadásának egyik módja az, hogy egymás után fűzzük őket. Ugyanemiatt

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\mathbf{e}-\mathbf{f}.$$

Ha **e** és **f** azonosak, $\overrightarrow{EF}$ az ún. null–vektor. Ha **e** és **f** azonos állásúak, de ellentétes irányúak, akkor $\overrightarrow{OG}=\mathbf{0}$. Különben az O, E, G, F pontok paralelogrammát határoznak meg, és ebben $EF \perp OG$, tehát $(\mathbf{e}+\mathbf{f})$ merőleges $(\mathbf{e}-\mathbf{f})$-re. Mondjuk azt a könnyebb beszéd kedvéért, hogy két vektor merőleges egymásra, ha állásaik merőlegesek, ha egyikük hossza sem nulla, vagy pedig valamelyikük (esetleg mindkettő) hossza 0. Így most már feltétel nélkül mondhatjuk, hogy $(\mathbf{e}+\mathbf{f})$ merőleges $(\mathbf{e}-\mathbf{f})$-re. Mivel $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ egységnyi, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OM^*}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CM^*}$ merőleges az $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ vektorra. Ugyancsak merőleges

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AM^*} \quad \text{az} \quad \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB} \ \text{ vektorra, és}$$
$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BM^*} \quad \text{az} \quad \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC} \ \text{ vektorra.}$$

Itt $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AC}$ hossza nem lehet 0, mert egy háromszög oldalvektorai. Ha $\overrightarrow{AM^*}$, $\overrightarrow{BM^*}$, $\overrightarrow{CM^*}$ valamelyike $\mathbf{0}$, akkor abban a csúcsban van a háromszög magasságpontja, amelyikkel M^* azonos, hiszen ekkor O a szemközti oldal felezőpontja. Különben az AM^* és AM, BM^* és BM, CM^* és CM egyenesek azonosak, ami csak úgy lehet, ha M^* azonos M-mel.

Megjegyzések. 1. Egy sík vektorai között kétféleképp szokás szorzást definiálni; az egyik eredménye szám, azért ezt „skaláris” szorzásnak hívják, a másik eredménye vektor, így ez a „vektoriális” szorzás. Az **a**, **b** vektorok skaláris szorzata $|a|\cdot|b|\cos\varepsilon$, ahol ε az **a**, **b** közti szög. (Ha **a**, **b** valamelyike **0**, a szorzat 0.) A definícióból kiolvasható, hogy ez a szorzás kommutatív, így erre is érvényes az $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{a}-\mathbf{b})=\mathbf{a}^2\text{-}\mathbf{b}^2$ összefüggés. Ebből is látszik, hogy egységvektorok összege és különbsége merőleges egymásra.

2. Ismeretes, hogy

$$\overrightarrow{OS}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right),$$

ahol S a háromszög súlypontja. Ezt (1*)-gal összevetve kapjuk, hogy $\overrightarrow{OM}=3\overrightarrow{OS}$, vagyis S az OM szakasz O-hoz közelebbi harmadolópontja. Feladatunk II. megoldása erre az (*Euler*től származó) állításra szokásos bizonyítások egyikének adaptálása.