I. rész

1. *Egy téglalap oldalainak aránya* $1:2$. *Tudjuk, hogy a terület mérőszáma egyenlő a kerület és az átlók hosszának összegét jelölő mérőszámmal. Határozzuk meg a téglalap egy csúcsának távolságát a csúcsot nem tartalmazó átlótól.*

(*11 pont*)

Megoldás. A téglalap oldalai: a, $2a$, ekkor átlójának hossza: $a\sqrt{5}$. A téglalap területe: $2a^2$, a kerületének és az átlók hosszának összege: $2a\left(3+\sqrt{5}\right)$.

Tudjuk, hogy $2a^2 = 2a\left(3+\sqrt{5}\right)$. Mivel $a=0$ nem lehet, így $a = 3+\sqrt{5}$. A téglalap területét az átló, valamint egy csúcs és annak az átlótól

való m távolsága segítségével is kiszámíthatjuk: $2\cdot\dfrac{a\sqrt{5}\cdot m}{2}$.

A kétféle módon felírt terület egyenlőségéből és az a kiszámolt értékéből kapjuk: $\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{5}\cdot m = 2\left(3+\sqrt{5}\right)^2$. Ebből kifejezhető m értéke:

$$m = \frac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}+10}{5}.$$

2. *Oldjuk meg a következő egyenletrendszert*:

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 - 8x + 8y &= 0,\\ xy - 3x - y &= 0. \end{aligned}\right\}$$

(*12 pont*)

Megoldás. Az első egyenletet írjuk szorzatalakban: $(x-y)(x+y-8)=0$. Ebből következik, hogy $y=x$ vagy $y=-x+8$. Mindkét esetben a második egyenletbe behelyettesítve x-re másodfokú egyenletet kapunk.

Az első esetben: $x^2-4x=0$. Ekkor két megoldást kapunk: $x_1=0,\quad y_1=0,$
$x_2=4,\quad y_2=4.$

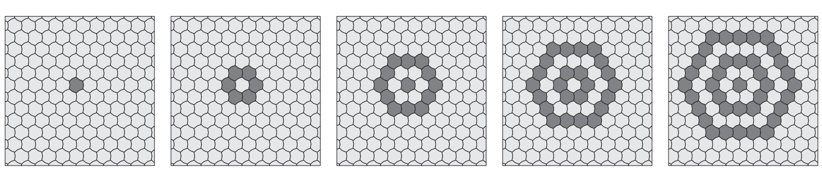
A második esetben: $x^2-6x+8=0$. Ebben az esetben is két megoldást kapunk, de az egyik már az előzőekben szerepelt: $x_3=2,\quad y_3=6,$
$x_4=4,\quad y_4=4.$

Vagyis az egyenletrendszernek három megoldása van.

3. *A térkövezéshez nagyon sokféle alakú és színű kő vásárolható. Az* ábrákon *az úgynevezett fodorkövet, és az ebből kialakítható mintasorozatot látjuk.*

a) *Hány darab sötétszürke kő szükséges a hatodik mintához?*
b) *Hányadik mintához kell pontosan* 150 *darab sötétszürke kő?*
c) *Adjuk meg rekurzív képlettel a sötétszürke kövek számát az* n*-edik mintában.*

(*14 pont*)



Megoldás. *a*) Az ábrasorozat tanulmányozásával látható, hogy a hatodik minta a negyedikből származtatható. Egy világos sáv kirakása után minden oldalon hat-hat sötétszürke követ kell leraknunk, de ekkor a sarkokat kétszer számoltuk. Mivel a negyedik minta 24 sötétszürke követ tartalmaz, ezért a hatodikhoz $24+6\cdot 6-6$, azaz 54 darab sötétszürke kő kell.

b) Az előző gondolatot alkalmazva a sorozat egymást követő tagjai a következő módon alakulnak: $1, 6, 13, 24, 37, 54, 73, 96, 121, 15$
Vagyis a sorozat 10. tagja a 150.

c) Tudjuk, hogy $a_1 = 1$, $a_2 = 6$. Az n-edik ábrán (ahol $n > 2$ és egész szám) a sötétszürke kövek száma: $a_n = a_{n-2} + 6 \cdot n - 6$.

4. *Egy iskolai sakkbajnokságon mindenki pontosan egyszer játszott mindenkivel. 63 játszma után még mindenkinek négy játszmája hátravolt.*

a) Hányan szerepeltek összesen a bajnokságon?

b) Ekkor két véletlenszerűen kiválasztott játékossal beszélgetett az iskolaújság egyik szerkesztője. Mekkora a valószínűsége, hogy ők még nem játszottak egymással? (*14 pont*)

Megoldás.

a) Legyen a csapatok száma n, ekkor az összes játszmák száma: $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Mindenkinek négy játszmája volt még hátra, vagyis $\dfrac{4n}{2}$ játszmát kell még lejátszani.

A lejátszott mérkőzések száma:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{4n}{2} = 63,$$

amiből az $n^2 - 5n - 126 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Az egyenlet gyökei: $n_1 = 14$, $n_2 = -9$.

Vagyis a sakkbajnokságon 14-en szerepeltek.

b) Az összes játszmák száma: $\dfrac{14 \cdot 13}{2} = 91$. A kedvező esetek száma: $91 - 63 = 28$. A keresett valószínűség:

$$\frac{28}{91} = \frac{4}{13} \approx 0{,}31.$$

II. rész

5. *a*) *Ha* 2-vel *csökkentjük az* $ax^2 + bx + c = 0$ *egyenlet gyökeit, akkor az* $ax^2 + cx + b = 0$ *egyenlet gyökeit kapjuk. Adjuk meg az eredeti egyenlet együtthatóit, ha tudjuk, hogy az összegük* -3.

b) *Az* $ax^2 + bx + c = 0$ *egyenletben az együtthatók egy növekedő számtani sorozat három egymást követő tagjai, az*

$$(a+2)x^2 + bx + (c+2) = 0$$

egyenletben az együtthatók pedig egy mértani sorozat három egymást követő tagjai. Van-e valós megoldása az első egyenletnek, ha az együtthatóinak összege 9?

c) *Az* $ax^2 + bx + c = 0$ *másodfokú egyenlet két zérushelye* x_1 *és* x_2. *Írjunk fel egy olyan harmadfokú egyenletet gyöktényezős alakban, amelynek zérushelyei*: x_1x_2; $x_1^2 + x_2^2$; $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.

(*16 pont*)

Megoldás.

a) A második egyenlet gyökei: x_1 és x_2, ez alapján: $x_1 + x_2 = -\dfrac{c}{a}$, $x_1x_2 = \dfrac{b}{a}$. Ekkor $x_1 + 2 + x_2 + 2 = -\dfrac{c}{a} + 4 = -\dfrac{b}{a}$, valamint

$$(x_1+2)(x_2+2) = x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4 = \frac{b}{a} + 2 \cdot \left(-\frac{c}{a}\right) + 4 = \frac{c}{a}.$$

Vagyis a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\left.\begin{aligned} a + b + c &= -3, \\ 4a + b - c &= 0, \\ 4a + b - 3c &= 0. \end{aligned}\right\}$$

A megoldás: $a = 1$, $b = -4$, $c = 0$.

b) A feladat szövege szerint most a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} 2b &= a + c, \\ b^2 &= (a+2)(c+2), \\ a + b + c &= 9. \end{aligned}\right\}$$

Az első és a harmadik egyenlet összevetésével azonnal kapjuk, hogy $b = 3$.

Ekkor az első és a második egyenlet a következő egyenletrendszert adja:

$$\left.\begin{aligned} a + c &= 6, \\ (a+2)(c+2) &= 9. \end{aligned}\right\}$$

A $c = 6 - a$ helyettesítéssel az $a^2 - 6a - 7 = 0$ egyenletet kapjuk. Ennek csak a $b = 3$-nál kisebb megoldása elfogadható, mert az együtthatóknak egy növekedő számtani sorozatot kell alkotni, így $a = -1$. Ezek alapján: $c = 7$.

Az eredeti egyenlet együtthatóinak ismeretében meghatározzuk a diszkrimináns előjelét:

$$D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 7 > 0.$$

Vagyis van valós megoldása az első egyenletnek.

c) Mivel $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$ és $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, ezért

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2 - 2ac}{a^2},$$

illetve

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c}.$$

A következő harmadfokú egyenlet megfelel a feladat feltételeinek:

$$(x - x_1x_2)\left(x - x_1^2 - x_2^2\right)\left(x - \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = \left(x - \frac{c}{a}\right)\left(x - \frac{b^2 - 2ac}{a^2}\right)\left(x + \frac{b}{c}\right) = 0.$$

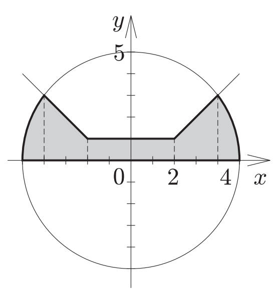
6. *Az $x^2 + y^2 = 25$ egyenletű kör, az*

$$f(x) = \frac{|x + 2| + |x - 2| - 2}{2}$$

hozzárendeléssel megadott függvény képe és az abszcisszatengely egy síkidomot határoznak meg, amit az abszcisszatengely körül megforgatunk. Mekkora az így kapott forgástest térfogata?

(*16 pont*)

Megoldás. Készítsünk *vázlatrajzot.* Az origó középpontú 5 sugarú kör megrajzolása után ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt is.



Ha $x \in \,]-\infty; -2]$, akkor $f(x) = \dfrac{-(x + 2) - (x - 2) - 2}{2} = -x - 1.$

Ha $x \in [-2; 2]$, akkor $f(x) = \dfrac{(x + 2) - (x - 2) - 2}{2} = 1.$

Ha $x \in \,]2; \infty]$, akkor $f(x) = \dfrac{(x + 2) + (x - 2) - 2}{2} = x - 1.$

Ezeket figyelembe véve kapjuk az *ábrát.*

Az $f(x)$ függvény és a kör metszéspontjainak koordinátái leolvashatók az ábráról, amiknek a helyességét visszahelyettesítéssel kapjuk: $A(4; 3)$ és $B(-4; 3)$.

A keletkezett forgástest térfogata:

$$V = 2\pi \left[\int_0^2 1\,dx + \int_2^4 (x - 1)^2\,dx + \int_4^5 \left(25 - x^2\right)dx\right] =$$

$$= 2\pi \left[\int_0^2 1\,dx + \int_2^4 \left(x^2 - 2x + 1\right)dx + \int_4^5 \left(25 - x^2\right)dx\right] =$$

$$= 2\pi\,[x]_0^2 + 2\pi \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_2^4 + 2\pi \left[25x - \frac{x^3}{3}\right]_4^5 =$$

$$= 2\pi \cdot 2 + 2\pi \left(\frac{64}{3} - 16 + 4 - \frac{8}{3} + 4 - 2\right) + 2\pi \left(125 - \frac{125}{3} - 100 + \frac{64}{3}\right) =$$

$$= 4\pi + \frac{52}{3}\pi + \frac{28}{3}\pi = \frac{92}{3} \cdot \pi.$$

7. *a) Igazoljuk, hogy* $\sqrt{31+8\sqrt{15}}+\sqrt{31-8\sqrt{15}}$ *egész szám.*
b) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{\left(31+8\sqrt{15}\right)^x}+\sqrt{\left(31-8\sqrt{15}\right)^x}=\frac{10}{3}. \qquad (16\ pont)$$

Megoldás. *a)*

$$\sqrt{31+8\sqrt{15}}+\sqrt{31-8\sqrt{15}}=\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^2}=4+\sqrt{15}+4-\sqrt{15}=8.$$

Tehát valóban egész szám.
b) Alakítsuk az egyenletet:

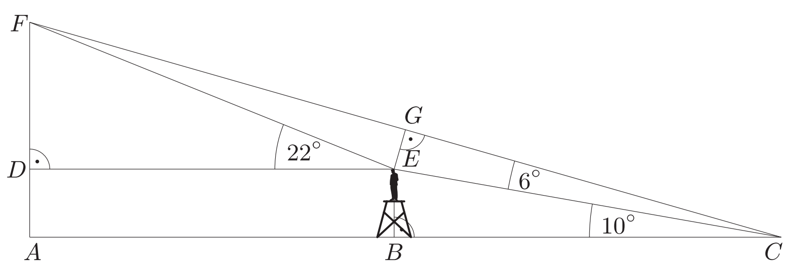
$$\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)^{2x}}+\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)^{2x}}=\frac{10}{3},$$

$$\left(4+\sqrt{15}\right)^x+\left(4-\sqrt{15}\right)^x=\frac{10}{3}.$$

Legyen $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=a$, ekkor $\left(4-\sqrt{15}\right)^x=\frac{1}{a}$.
Ekkor az $a+\frac{1}{a}=\frac{10}{3}$ egyenletet kapjuk,
amiből a $3a^2-10a+3=0$ másodfokú egyenlet adódik. A gyökök: $a_1=3$, $a_2=\frac{1}{3}$.
A $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=3$ egyenletből: $x_1=\log_{4+\sqrt{15}}3$.
A $\left(4+\sqrt{15}\right)^x=\frac{1}{3}$ egyenletből: $x_2=\log_{4+\sqrt{15}}\frac{1}{3}$.

8. *Egy szabadtéri színpad hátsó részén egy* 12 m *magas oszlop áll, melynek a súgólyuktól a teteje* 16° *-os emelkedési szögben látszik. Az oszlop talppontját és a súgólyukat összekötő egyenes fölött van egy emelvény, amelyről a* 180 cm *magas színész* 22° *-os emelkedési szögben látja az oszlop tetejét. A súgólyuktól a színész feje búbja* 10° -os emelkedési szögű.
a) Igazoljuk, hogy a színész feje egyenlő távolságra van az oszlop tetejétől és a súgólyuktól.
b) Milyen magas a színpadon felépített emelvény? (*16 pont*)

Megoldás. A feladat szövege alapján készítsünk *vázlatrajzot.*



a) Az *ábrán* a színpad eleje C, az oszlop teteje F, az emelvény tetején álló színész fejeteteje E. Tudjuk, hogy $AF=12$ m, $ACE\sphericalangle=10^\circ$, $ACF\sphericalangle=16^\circ$, $DEF\sphericalangle=22^\circ$.

Az ACF derékszögű háromszögben $FC=\frac{FA}{\sin 16^\circ}$. $ECF\sphericalangle=ACF\sphericalangle-ACE\sphericalangle=6^\circ$, $CFE\sphericalangle=CFA\sphericalangle-EFD\sphericalangle=74^\circ-68^\circ=6^\circ$.

Vagyis EFC egyenlőszárú háromszög, valóban $EC=EF$.

b) Az ACF derékszögű háromszögben: $CF=\frac{12}{\sin 16^\circ}$. Mivel EFC egyenlőszárú háromszög, azért G a CF felezőpontja, így $GC=\frac{6}{\sin 16^\circ}$. Az EGC derékszögű háromszögben:

$$EC=\frac{GC}{\cos 6^\circ}=\frac{\frac{6}{\sin 16^\circ}}{\cos 6^\circ}.$$

Végül az EBC derékszögű háromszögben:

$$EB=EC\cdot\sin 10^\circ=\frac{\frac{6}{\sin 16^\circ}}{\cos 6^\circ}\cdot\sin 10^\circ=\frac{6\cdot\sin 10^\circ}{\cos 6^\circ\cdot\sin 16^\circ}\approx 3{,}8.$$

Mivel a színész testmagassága 1,8 m, azért az emelvény kb. 2 méter magas.

9. *a*) *Egy dobozba 100 darab piros és zöld építőkockát raktak, méretük alapján kicsiket és nagyokat is. Kis piros kocka véletlenszerű kihúzásának ugyanannyi a valószínűsége, mint annak, hogy nagy pirosat vagy kis zöldet húzunk a dobozból. A zöldek és a kicsik aránya* 7 : 11. *A nagyok* 20 *-szal kevesebben vannak, mint a pirosak. Hány kocka van az egyes fajtákból?*

b) *Egy dobozba* 93 *darab piros és zöld építőkockát raktak, méretük alapján kicsiket és nagyokat is. Mindegyik fajtából különböző prímszám darab van. A piros kockák száma osztható héttel. A kis zöld kockákból van a legkevesebb. Nagy pirosból ötvennel több van, mint kis pirosból. Hány kocka van az egyes fajtákból?*

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) A következő táblázatból kiolvashatjuk a négy különböző fajta darabszámát jelölő betűket.

	nagy	kicsi
piros	a	b
zöld	c	d

A szöveg és a táblázat alapján a következő egyenletrendszer írható fel:

$$\left.\begin{aligned} a+b+c+d&=100,\\ a+d&=b,\\ \frac{c+d}{b+d}&=\frac{7}{11},\\ a+c&=a+b-20. \end{aligned}\right\}$$

Az egyenletrendszer megoldása megadja a kérdésre a választ: $a=25$ (nagy piros), $b=40$ (kis piros), $c=20$ (nagy zöld), $d=15$ (kis zöld).

b) Mivel négy különböző prímszám összege páratlan, azért az egyik a 2. A szöveg alapján ez a kis zöld kockák száma. A pirosak és a nagy zöldek darabszáma ezek szerint 91. Tudjuk, hogy a piros kockák száma osztható héttel, így a nagy zöldek száma is osztható lesz héttel. Ilyen prímszám csak egy van, ez a 7. Azaz a nagy zöld kockák száma 7. Most már tudjuk, hogy a pirosak száma 84. A feladat állítása szerint nagy piros kockákból ötvennel több van, mint kis piros kockákból. Ezek szerint a nagy pirosból 67 darab, a kis pirosból pedig 17 darab van a dobozban.

Számadó László