Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Adjuk meg a következő egyenletek valós megoldásait:
a) $(x+500)^2 = 252\,012 - 1011x$;
b) $\lg^2 x + 2011 \cdot \lg x - 2012 = 0$;
c) $x + 2011\sqrt{x-7} - 2019 = 0$. (*11 pont*)

2. Egy mértani sorozat első eleme 2. Ha a sorozat második elemét 20-szal csökkentjük, a harmadik elemét pedig az első kettő elé írjuk, akkor egy számtani sorozat három, egymást követő tagját kapjuk. Adjuk meg az eredeti három számot.

(*12 pont*)

3. Az ABC egyenlőszárú háromszögben $AB = 6$, $CF = 9$, ahol F az AB alap felezőpontja. Az A csúcstól indulva és a körüljárási irányt tartva az oldalakon a harmadoló pontok: A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2. Mekkora a C_1B_1, C_2B_2, C_1A_2, A_1B_2 egyenesek által meghatározott négyszög területe? (*14 pont*)

4. Az $ABCD$ téglalap alakú 20°-os emelkedő alsó, vízszintes, 20 méter hosszúságú AB oldalának az A csúcsából egy egyenes mentén szeretnénk feljutni a CD oldal valamely pontjába. Ezeknek a párhuzamos oldalaknak 12 méter a távolsága. Hová érkezhetünk, ha az útvonal vízszintessel bezárt hajlásszöge nem haladhatja meg a 12°-ot?

(*14 pont*)

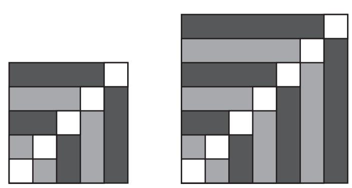
II. rész

5. Tekintsük a $K(5;2)$ középpontú, $r = 3$ egység sugarú k kört. Az origóból az e_1 és az e_2 érintők húzhatók a k körhöz.
a) Írjuk fel e_1 és e_2 egyenletét.
b) Mekkora szöget zár be egymással e_1 és e_2?
c) Mekkora területű az a síkidom, amelynek pontjaiból a k kör 60°-nál nem kisebb, 90°-nál pedig nem nagyobb szögben látható? (*16 pont*)

6. Miskolcon a Tiszai pályaudvar várótermének kövezéséhez az *ábrán* látható burkolólapokat is használtak. Ezeken a lapokon egy ötször ötös négyzethálót színeztek három színnel (sötétzöld, világoszöld, fehér).

Ezt a mintát jobbra és felfelé tovább folytathatjuk, és bármely ötnél nagyobb páratlan számhoz elkészíthetjük az ábra színezését. Lerajzoltuk az így készített hétszer hetes négyzethálót is.

a) Hányadrésze lesz világoszöld az 51 egység oldalú négyzetnek?



b) Hányadrésze lesz sötétzöld a 101 egység oldalú négyzetnek?

c) Igazoljuk, hogyha a négyzet oldalhosszát minden határon túl növeljük, akkor mind a világoszöld, mind a sötétzöld részek területe a négyzet területének a feléhez tart. (*16 pont*)

7. A $[0;4]$-on értelmezett $f(x) = \dfrac{x^2}{16} + 1$ hozzárendeléssel adott függvény képét megforgatjuk az x tengely körül. Az így kapott felület egy olyan forgástest alakú edény palástját adja, melynek az alja a kisebb kör. A koordinátarendszer egysége a valóságban 1 dm-t jelent.

a) Hány literes az edény, ha falvastagságát elhanyagolhatónak vehetjük?

b) Az edény aljának középpontjában áll egy elhanyagolható vastagságú egyenes pálca. Ezt a pálcát úgy döntjük el, hogy az alsó vége nem mozdul el. Milyen magasságban érinti a pálca az edény falát? (*16 pont*)

8. Oldjuk meg a $-x^2 + 12x - 33 = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-7}$ egyenletet. (*16 pont*)

9. Egy háromszögben ismerjük mindhárom oldal hosszát és mindhárom szög nagyságát. Mutassuk meg, hogy ezeket az értékeket az

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma}$$

képletbe behelyettesítve a háromszög területét kapjuk. (*16 pont*)