Megoldásvázlatok a 2012/6. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Adott a valós számok halmazán értelmezett f és g függvény:*

$$f(x) = (2x-1)^2 + (x-4)(x+4) - 5x(x-1),$$
$$g(x) = x^3 - 4|x|.$$

a) Igazoljuk, hogy f elsőfokú függvény.
b) Adjuk meg a g függvény zérushelyeit. (*11 pont*)

Megoldás. *a)* A hozzárendelési szabályban megadott képlet a következő módon egyszerűbb alakra hozható:

$$(2x-1)^2 + (x-4)(x+4) - 5x(x-1) = 4x^2 - 4x + 1 + x^2 - 16 - 5x^2 + 5x = x - 15.$$

Vagyis f valóban elsőfokú függvény.

b) A választ az $x^3 - 4|x| = 0$ egyenlet megoldásai adják. Ha $x \geq 0$, akkor az egyenlet az $x^3 - 4x = 0$ alakot veszi föl, azaz $x(x-2)(x+2) = 0$. A három tényező bármelyike lehet nulla, nekünk a feltétel miatt most az $x = 0$ és az $x = 2$ a megfelelő. Ha $x < 0$, akkor az egyenlet $x^3 + 4x = 0$ formában is írható, azaz $x\left(x^2+4\right) = 0$. A második tényező minden valós x esetén pozitív, az első tényező pedig nulla esetén lesz nulla. Vagyis a vizsgált feltétel mellett nincs egyetlen megfelelő érték sem.

Vagyis a g függvénynek két zérushelye van, a 0 és a 2.

2. *Egy szabályos hatszög oldalai és átlói közül ötöt pirosra, a többit zöldre festettük. Ezek után véletlenszerűen választunk közülük öt szakaszt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan három piros és kettő zöld lesz a kiválasztottak között?* (*13 pont*)

Megoldás. A szabályos hatszögnek 6 oldala és 9 átlója van. A 15 szakasz között lesz 5 piros és 10 zöld. Először meghatározzuk az összes lehetőségek számát. A 15 szakasz közül ötöt választunk (a sorrend nem számít). Ezt $\binom{15}{5} =$ 3003-féleképpen tehetjük meg. Ezután a vizsgált esemény szempontjából kedvező esetek számát is összeszámoljuk. A három piros szakaszt az öt pirosból, a két zöldet a tíz zöldből kell választanunk (a sorrend itt sem számít).

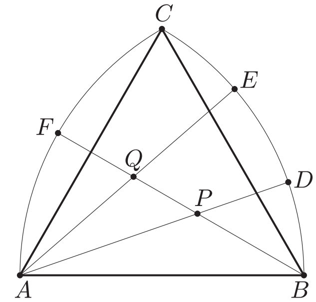
Ez $\binom{5}{3}\binom{10}{2} = 10 \cdot 45 = 450$-féleképpen történhet.

A keresett valószínűség: $p = \dfrac{450}{3003} \approx 0{,}1499$.

3. *Az ABC egy szabályos háromszög. Az A középpontú AB sugarú kör kisebbik BC ívének B-hez közelebbi harmadolópontja D, C-hez közelebbi harmadolópontja pedig E. A B középpontú AB sugarú kör kisebbik AC ívének felezőpontja F. Mekkorák az AD, AE és BF egyenesek által meghatározott háromszög belső szögei?* (*13 pont*)

Megoldás. Legyen AD és BF metszéspontja P, AE és BF metszéspontja pedig Q.

Az APQ háromszög belső szögeinek nagyságát kell megadnunk. Az ABC szabályos háromszög minden szöge 60°-os. A feladat szövegéből következik a kerületi szögek tétele szerint, hogy AD és AE harmadolja a szabályos háromszög A csúcsánál található 60°-os szöget. Ezért az AQP háromszögben az A csúcsnál 20°-os, és a BAP háromszögben is az A csúcsnál 20°-os szög van. A kerületi szögek tétele szerint a BF egyenes felezi a szabályos háromszög B csúcsánál található 60°-os szöget. Tehát $ABP\sphericalangle = 30^\circ$.



Az ABP háromszög P csúcsánál található külső szög azonos az APQ háromszög P csúcsánál található belső szöggel, azaz az ABP háromszög két másik belső szögének összegével egyenlő: $APQ\sphericalangle = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$.

Két belső szög ismeretében a harmadik kiszámolható: $AQP\sphericalangle = 180^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 110^\circ$. Vagyis a kérdésben szereplő háromszög szögei: 20°, 50°, 110°.

4. *Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái: $A(1;1)$, $B(6;2)$ és $C(2;6)$.*

a) Milyen hosszú a háromszög legrövidebb magassága?

b) Mekkora a háromszög területe?

c) Egyszerre dobunk egy piros és egy zöld dobókockával. A pirossal dobott szám legyen egy pont első, a zölddel dobott szám a második koordinátája. Mekkora valószínűséggel lesz az így kapott pont az ABC háromszög belsejében? (*14 pont*)

Megoldás. *a*) A legrövidebb magasság a leghosszabb oldalhoz tartozik. Az oldalak hosszát meghatározzuk a két pont távolságát megadó képlettel:

$$AB = \sqrt{(1-6)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{26}\,,$$
$$BC = \sqrt{(6-2)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}\,,$$
$$CA = \sqrt{(2-1)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{26}\,.$$

Vagyis az A csúcs és a BC oldalegyenes távolsága adja a keresett magasság hosszát.

Számolásunk szerint az ABC egyenlő szárú háromszög, hiszen $AB = AC$. A keresett magasság az alaphoz tartozik, aminek talppontja az oldal felezőpontja is egyben: $T(4;4)$, vagyis a keresett magasság hossza:

$$TA = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}\,.$$

b) A $BC = 4\sqrt{2}$ és a $TA = 3\sqrt{2}$ ismeretében a terület:

$$T_{ABC} = \frac{4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2} = 12.$$

Megjegyzés. Természetesen az előző rész nélkül, közvetlenül is meghatározható a terület. Az $ADEF$ négyzetből (ahol $D(6;1)$, $E(6;6)$ és $F(1;6)$ koordinátájú pontok) levágjuk az ADB, AFC és BCE derékszögű háromszögeket.

Vagyis: $T_{ABC} = 25 - 2{,}5 - 2{,}5 - 8 = 12$ (és ebből szintén megkapható, hogy $TA = \dfrac{12}{BC} = 3\sqrt{2}$).

c) A háromszög csúcsai közül az A abszcisszája a legkisebb, a B abszcisszája a legnagyobb. Ezért a háromszög belsejében lévő pontok első koordinátája 2, 3, 4 vagy 5 lehet. Ezekhez az esetekhez gyorsan meghatározhatók a megfelelő második koordináták:

$$\begin{array}{llll} (2;2), & (2;3), & (2;4), & (2;5), \\ (3;2), & (3;3), & (3;4), & \\ (4;2), & (4;3), & & \\ (5;2). & & & \end{array}$$

Ezek mindegyike lehet a dobókockák dobásának eredménye, így a kedvező esetek száma 10.

Az összes esetek száma (a két dobókocka dobásával előállítható pontok száma): $6\cdot 6 = 36$. A keresett valószínűség:

$$\frac{10}{36} = 0{,}2\dot{7}.$$

II. rész

5. *Egy érettségi találkozón Lászlótól 2012-ben megkérdezték tanítványai, hogy hány éves. Ezt válaszolta:*

„Édesanyám születési évszáma $\overline{abcd}$, az én születési évszámom pedig $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2$, ekkor ő 21 éves volt. Nem egy városban élünk, a következő héten utazom hozzá.”

Hány éves László 2012-ben? (*16 pont*)

Megoldás. Mivel László 2012-ben a már korábban érettségizett tanítványaival beszélgetett, ezért ő a 20. században született. A következő héten meglátogatja édesanyját, így ő is biztosan a 20. században született. Ha élne 112 évnél idősebb asszony hazánkban, arról biztosan értesültünk volna a médiából. (A legidősebb magyar 2012. április 27-én 110 éves volt.) Vagyis csak az $a = 1$, $b = 9$ jöhet szóba.

A szöveg szerint:

$$\overline{abcd} + 21 = \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2,$$
$$1900 + 10c + d + 21 = 19^2 + 100c^2 + 20cd + d^2,$$
$$1560 + 10c - 100c^2 - 20cd = d^2 - d.$$

Mivel a bal oldal osztható 10-zel, ezért a jobb oldalon is 10-zel osztható számnak kell állnia. Tehát a d számjegy lehetséges értékei: 6, 5, 1, 0. A négy eset mindegyikéhez egy-egy másodfokú egyenlet tartozik. Ezek közül nekünk azok az esetek lesznek megfelelőek, amelyeknek van számjegy megoldása.

A másodfokú egyenletek a következők lesznek:
I. eset. Ha $d = 6$, akkor $10c^2 + 11c - 153 = 0$. Nem kapunk c-re számjegyet.
II. eset. Ha $d = 5$, akkor $10c^2 + 9c - 154 = 0$. Nem kapunk c-re számjegyet.
III. eset. Ha $d = 1$, akkor $10c^2 + c - 156 = 0$. Nem kapunk c-re számjegyet.
IV. eset. Ha $d = 0$, akkor $10c^2 - c - 156 = 0$. Innen a $c = 4$ megfelelő.
Az egyedüli megoldás: $a = 1$, $b = 9$, $c = 4$, $d = 0$.
Azaz László születési évszáma $19^2 + 40^2 = 1961$, vagyis 2012-ben 51 éves.

6. *Tekintsük az* $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n+12}{n+3}\right\}$ *sorozatot* ($n \in \mathbb{N}^+$).
a) Határozzuk meg a sorozat összes olyan tagját, amelyek 3-nál nem kisebbek.
b) Az a_1, a_3, a_9 sorszámai egy mértani sorozat három egymást követő tagját adják. Igazoljuk, hogy a sorozat ezen három eleme egy számtani sorozatnak a három egymást követő tagja lesz.
c) Hány olyan tagja van a sorozatnak, amelyek három tizedes jegyre kerekített értéke 2,012?
d) Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ értékét. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Határozzuk meg a sorozat első néhány tagját:

$$a_1 = \frac{2\cdot 1 + 12}{1+3} = \frac{7}{2}, \qquad a_2 = \frac{2\cdot 2 + 12}{2+3} = \frac{16}{5}, \qquad a_3 = \frac{2\cdot 3 + 12}{3+3} = 3.$$

Ezek a tagok megfelelőek. Megmutatjuk, hogy több nincs, mert a sorozat szigorúan monoton csökkenő, azaz a

$$\frac{2n+12}{n+3} > \frac{2(n+1)+12}{(n+1)+3}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{2n+12}{n+3} > \frac{2n+14}{n+4}$$

egyenlőtlenség minden pozitív egész n esetén teljesül.

Szorozhatjuk az egyenlőtlenség mindkét oldalát $(n+3)(n+4)$-gyel, hiszen pozitív egész n-ek esetén ez a szorzat pozitív:

$$(2n+12)(n+4) > (2n+14)(n+3),$$
$$2n^2 + 20n + 48 > 2n^2 + 20n + 42.$$

Ez pedig valóban igaz, vagyis a sorozat szigorúan monoton csökkenő.

Tehát a sorozatnak csak az első, a második és a harmadik tagja nem kisebb 3-nál.

b) A sorozat kérdéses három tagja a következő: $a_1 = \dfrac{7}{2}$, $a_3 = 3 = \dfrac{6}{2}$, $a_9 = \dfrac{2\cdot 9 + 12}{9+3} = \dfrac{5}{2}$.

Mivel $\dfrac{6}{2} - \dfrac{7}{2} = \dfrac{5}{2} - \dfrac{6}{2} = -\dfrac{1}{2}$, így ezek a számok valóban egy számtani sorozat három egymást követő tagját adják.

c) A feladat feltétele szerint azokat a pozitív egész n-eket keressük, amelyekre

$$2{,}0115 \le \frac{2n+12}{n+3} < 2{,}0125.$$

Szorozhatjuk az egyenlőtlenséget $(n+3)$-mal, hiszen pozitív egész n-ek esetén ez pozitív:

$$2{,}0115(n+3) \le 2n + 12 < 2{,}0125(n+3),$$
$$0{,}0115n + 6{,}0345 \le 12 < 0{,}0125n + 6{,}375.$$

Az első egyenlőtlenségből kapjuk: $n \le 5{,}9655 : 0{,}0115 \approx 518{,}739$. A második egyenlőtlenségből kapjuk: $477 < n$. Vagyis az n lehetséges értékei: 478, 479, …, 517, 518. Ez összesen 41 tag.

d) A határérték tulajdonságait felhasználva:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+12}{n+3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{12}{n}}{1 + \frac{3}{n}} = \frac{2+0}{1+0} = 2.$$

7. *Az $ABCDEFGH$ téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az $ABCD$ alaplappal egybevágó lapon az E csúcsot az A-val, a F csúcsot a B-vel, a G csúcsot a C-vel, a H csúcsot a D-vel kösse össze él. Tudjuk, hogy a BAF szög $45°$-os, a CAG szög pedig $30°$-os.*

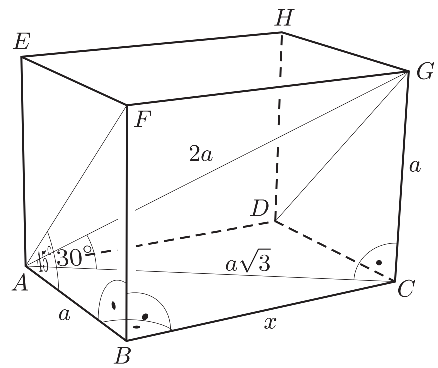
a) Igazoljuk, hogy $AFGD$ négyzet.

b) Mekkora az $AFBC$ tetraéder felszíne, ha $AB = a$?

c) Mekkora az $AFHC$ tetraéder térfogata, ha AF és HC távolsága $a\sqrt{2}$?

(16 pont)

Megoldás. *a)* Használjuk az *ábra* jelöléseit. Mivel a téglatest $ABFE$ oldallapján az átló szögfelező ($BAF\sphericalangle = 45°$), ezért ez a lap négyzet. Az oldalai legyenek a hosszúságúak, ekkor $AF = a\sqrt{2}$. Tudjuk, hogy a CAG derékszögű háromszögben $CAG\sphericalangle = 30°$, és $CG = a$, ezért $AG = 2a$, $AC = a\sqrt{3}$.

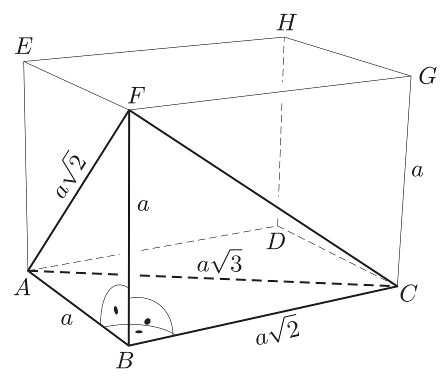


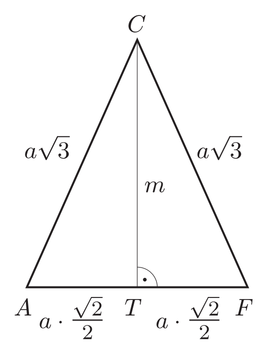
Az ABC derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$a^2 + x^2 = \left(a\sqrt{3}\right)^2, \qquad x = a\sqrt{2}.$$

Vagyis a téglatest ezzel párhuzamos minden éle $a\sqrt{2}$ hosszúságú. Téglatest esetén az $AFGD$ metszetről tudjuk, hogy téglalap, most pedig az is kiderült, hogy két szomszédos oldala egyenlő: $AF = FG = a\sqrt{2}$, ezért $AFGD$ valóban négyzet.

b) Az $AFBC$ tetraéder felszíne három derékszögű háromszögből: ABC, ABF és CBF, valamint az AFC egyenlő szárú háromszögből áll.





$AC = FC = a\sqrt{3}$, hiszen mindkettő ugyanolyan téglalapnak az átlója. Az AFC háromszögben a $TC = m$ magasság hossza Pitagorasz-tétellel kifejezhető:

$$m = \sqrt{3a^2 - \frac{1}{2}a^2} = a\sqrt{\frac{5}{2}}.$$

A tetraéder felszíne:

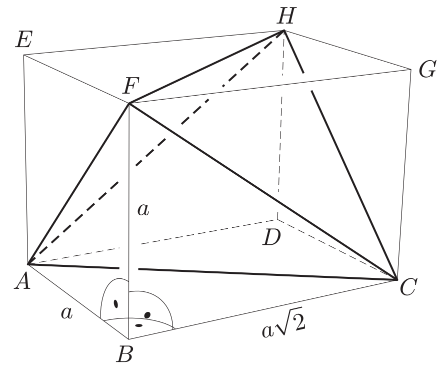
$$A = T_{ABC} + T_{ABF} + T_{CBF} + T_{AFC} =$$

$$= a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a^2 \cdot \frac{1}{2} + a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a^2 \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = a^2 \cdot \frac{\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{5}}{2} \approx 3{,}032a^2.$$

c) Az $ABCDEFGH$ téglatest B, D, E és G csúcsába is ugyanolyan hosszúságú három él fut be: a, a, $a\sqrt{2}$. Az ezek által kifeszített négy tetraédert kell levágnunk a téglatestből, hogy megmaradjon az $AFHC$ tetraéder. Az eddigi számolásunk azt mutatja, hogy ha az AF és HC távolsága $a\sqrt{2}$, akkor $AB = a$.

Egy levágott tetraéder térfogata:

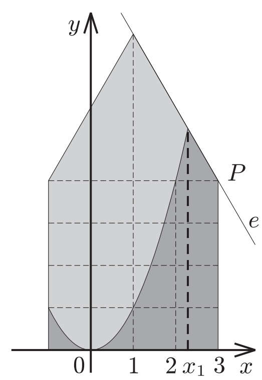
$$V_{ABCF} = \frac{\frac{a^2}{2} \cdot a\sqrt{2}}{3} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{6}.$$



Vagyis a feladatban szereplő tetraéder térfogata:

$$V_{AFHC} = V_{ABCDEFG} - 4 \cdot V_{ABCF} = a^3\sqrt{2} - 4 \cdot \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{6} = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}.$$

8. *Egy ház tűzfala egy négyzetből és egy szabályos háromszögből áll. A falat két színnel szeretnék vakolni. A két rész között a határvonal egy parabola lesz, amit a mellékelt* ábra *mutat. A házikó parabola feletti részét világosabbra, a többit sötétebbre vakolják. A felület hány százaléka lesz sötétebb árnyalatú?* *(16 pont)*



Megoldás. Legyen a négyzet oldala 4, ekkor a tűzfal területe:

$$T = 4^2 + \frac{4^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \approx 22{,}9.$$

Meghatározzuk a sötétebb rész területét. Ehhez az ábrát koordináta-rendszerbe tesszük. A parabola az $f(x) = x^2$ hozzárendeléssel megadott függvény képe. Az e egyenes illeszkedik a $P(3;4)$ pontra, és mivel az irányszöge $-60°$, azért az iránytangense: $-\sqrt{3}$. Ezek segítségével megadható, hogy az e egyenes egyenlete: $y - 4 = -\sqrt{3}(x - 3)$, vagyis az egyenes a $g(x) = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + 4$ hozzárendeléssel megadott függvény képe. Meghatározzuk a parabola és az e egyenes metszéspontjának koordinátáit.

Az $f(x) = g(x)$ egyenlet megoldása adja a metszéspontok első koordinátáját:

$$x^2 = -\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + 4,$$
$$x^2 + \sqrt{3}x - \left(3\sqrt{3} + 4\right) = 0.$$

A két gyök közül az egyik negatív, most arra a metszéspontra van szükségünk, amelynek az első koordinátája pozitív: $x_1 \approx 2{,}3$. A kérdéses területet a következő módon kapjuk:

$$T_1 = \int_{-1}^{2,3} x^2\,dx + \int_{2,3}^{3} \left(-\sqrt{3}x + 3\sqrt{3} + 4\right) dx =$$
$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2,3} + \left[-\sqrt{3} \cdot \frac{x^2}{2} + \left(3\sqrt{3} + 4\right)x\right]_{2,3}^{3} =$$
$$= \frac{2,3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} + \left(-\sqrt{3} \cdot \frac{3^2}{2} + \left(3\sqrt{3} + 4\right) \cdot 3\right) -$$
$$- \left(-\sqrt{3} \cdot \frac{2{,}3^2}{2} + \left(3\sqrt{3} + 4\right) \cdot 2{,}3\right) \approx 7{,}6.$$

Ez az egésznek kb. a 33,2%-a.

Megjegyzés. A második integrál helyett használhatjuk a trapéz területképletét is.

9. *Határozzuk meg azokat az x valós számokat, amelyre $\cos x$ és $\cos 2x$ négyzetösszege a $\cos 3x$ négyzetével egyenlő.* *(16 pont)*

Megoldás. A $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x$ egyenletet kell megoldanunk. Ezt az egyenletet $\cos^2 2x = (\cos 3x - \cos x)(\cos 3x + \cos x)$ alakra tudjuk hozni.

Tovább alakítva:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 2x = \left(-2\sin\frac{3x+x}{2}\sin\frac{3x-x}{2}\right)\left(2\cos\frac{3x+x}{2}\cos\frac{3x-x}{2}\right),\\
&\cos^2 2x = -2\cdot\sin 2x\cdot\sin x\cdot 2\cdot\cos 2x\cdot\cos x,\\
&\cos^2 2x = -2\cdot\sin 2x\cdot\sin 2x\cdot\cos 2x,\\
&\cos 2x\big(\cos 2x + 2\cdot\sin^2 2x\big) = 0,\\
&\cos 2x\big[\cos 2x + 2\cdot\big(1-\cos^2 2x\big)\big] = 0,\\
&\cos 2x\big(2\cos^2 2x - \cos 2x - 2\big) = 0.
\end{aligned}$$

A $\cos 2x$-re háromféle értéket kapunk:

I. eset: $\cos 2x = 0$, ahonnan $x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1\cdot\frac{\pi}{2}$, $k_1 \in \mathbb{Z}$.

II. eset: $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} > 1$, tehát nem ad megoldást.

III. eset: $\cos 2x = \frac{1-\sqrt{17}}{4} \approx -0{,}7808$, ahonnan $2x_2 \approx 2{,}4667 + 2k_2\pi$, $k_2 \in \mathbb{Z}$, $2x_3 \approx 3{,}8164 + 2k_3\pi$, $k_3 \in \mathbb{Z}$, vagyis $x_2 \approx 1{,}23 + k_2\pi$, $x_3 \approx 1{,}91 + k_3\pi$.

Tehát a feladat feltételeinek megfelelő összes valós számot az x_1, x_2, x_3 adja.

Számadó László