Az 53. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatainak megoldásai

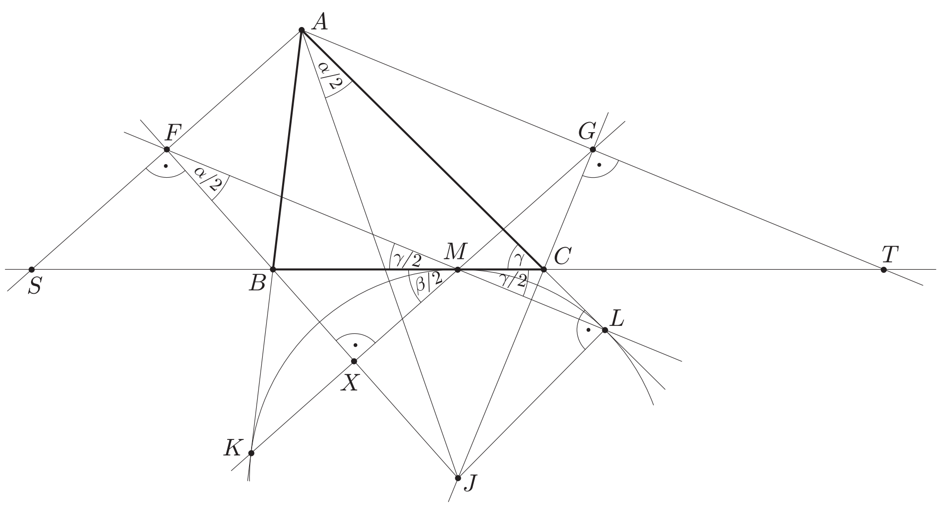
A hagyományoknak megfelelően ebben az évben is közöljük a nyári matematikai diákolimpia feladatainak a megoldásait; lényegében úgy, ahogyan a legilletékesebbek, a magyar csapat tagjai leírták. Közreműködésüket köszönjük és ezúton is gratulálunk eredményeikhez.

A szerkesztőség

1. *Az ABC háromszög A csúccsal szemközti hozzáírt körének középpontja J. Ez a hozzáírt kör a BC oldalt az M pontban, az AB, ill. AC egyeneseket pedig a K, ill. L pontban érinti. Az LM és BJ egyenesek metszéspontja F, a KM és CJ egyenesek metszéspontja pedig G. Legyen S az AF és BC egyenesek metszéspontja, T pedig a AG és BC egyenesek metszéspontja.*

Bizonyítsuk be, hogy M az ST szakasz felezőpontja.

(Az ABC háromszög A csúccsal szemközti hozzáírt köre *az a kör, amelyik érinti a BC szakaszt, továbbá az AB félegyenes B-n túli részét és az AC félegyenes C-n túli részét.)*



$FMB\sphericalangle = LMC\sphericalangle = \dfrac{\gamma}{2}$, mert az CLM háromszög egyenlő szárú és a C-nél levő szöge az ABC háromszög γ-hoz tartozó külső szöge. Hasonlóan $BMK\sphericalangle = \dfrac{\beta}{2}$. Jelölje az MK és JF szakaszok metszéspontját X; ekkor $MXF\sphericalangle = 90°$, mert a BMK háromszög egyenlő szárú, és BJ felezi a B-nél lévő szöget, ezért merőleges az MK alapra. Így

$$LFJ\sphericalangle = MFX\sphericalangle = 180° - FMX\sphericalangle - MXF\sphericalangle =$$
$$= 180° - FMB\sphericalangle - BMX\sphericalangle - MXF\sphericalangle = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2} - 90° = \frac{\alpha}{2}.$$

$LAJ\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$, mert az A-hoz tartozó belső szögfelező átmegy a hozzáírt kör középpontján. Ebből és az $LFJ\sphericalangle$-re kapott eredményből következik, hogy $ALJF$ húrnégyszög.

$ALJ\sphericalangle = 90°$, hiszen AL érintő, tehát a vele szemközti $JFA\sphericalangle$ is $90°$. GX párhuzamos AS-sel, mivel $GXF\sphericalangle = 90°$. Az előbbiekhez hasonlóan $JGA\sphericalangle = 90°$.

Így G felezi az AT szakaszt, mivel a JG-re való tükrözésnél az AL egyenes képe az MT egyenes, az AT egyenes helyben marad, tehát A képe T. Emiatt az ATS háromszögben a GM középvonal, tehát M felezi ST-t. (A megoldás független az ábrától.)

2. *Legyen $n \geq 3$ egész, és legyenek $a_2, a_3, \ldots, a_n$ olyan pozitív valós számok, amelyekre $a_2a_3\cdots a_n = 1$. Bizonyítsuk be, hogy*

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3\ldots(1+a_n)^n > n^n.$$

Ágoston Tamás megoldása. Ha $i \geq 2$ egész, akkor az $\frac{1}{i-1}, \frac{1}{i-1}, \ldots, \frac{1}{i-1}, a_i$ pozitív számokra (az $\frac{1}{i-1}$ szám $(i-1)$-szer szerepel) alkalmazhatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{(i-1)\frac{1}{i-1} + a_i}{i} \geq \sqrt[i]{\frac{a_i}{(i-1)^{i-1}}}.$$

Ezt i-edik hatványra emelve, és szorozva a bal oldali nevezővel:

$$(1) \qquad (1+a_i)^i \geq \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}} a_i.$$

Ha $i \in \{2,3,\dots,n\}$, akkor itt mindkét oldal pozitív, így ezekre az i-kre összeszorozva (1)-et:

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdot \ldots \cdot (1+a_n)^n \geq \frac{2^2}{1^1} \cdot \frac{3^3}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = n^n.$$

Itt használjuk azt a feltételt, hogy $a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$. Azt kell még belátnunk, hogy egyenlőség nem állhat fenn.

Mivel (1)-ben a kérdéses i-kre mindkét oldal pozitív, a szorzatban egyenlőség pontosan akkor áll, ha minden i-re (1)-ben egyenlőség áll. Ez pedig pontosan akkor igaz, ha minden i-re a számtani és mértani közepeket egyenlő számokra vettük, azaz $a_i = \frac{1}{i-1} = \ldots = \frac{1}{i-1}$. Ekkor viszont $a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n-1}$, ahol minden tényező pozitív, és 1-nél nem nagyobb. Viszont $n \geq 3$ miatt az 1-nél kisebb $\frac{1}{2}$ tényező is szerepel, vagyis a szorzat kisebb 1-nél. Ez ellentmond a feladat feltételének, így valóban nem állhat fenn egyenlőség, azaz

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdot \ldots \cdot (1+a_n)^n > n^n,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

3. *A hazudós játékot két játékos játssza: A és B. A játék szabályaiban szerepel két pozitív egész szám: k és n, ezek értékét mindkét játékos ismeri.*

A játék megkezdésekor A választ két egész számot: x-et és N-et, amikre $1 \leq x \leq N$. A az x számot titokban tartja, viszont N-et őszintén megmondja B -nek. B ezután megpróbál x-re vonatkozó információt szerezni A-tól a következő típusú kérdésekkel: B minden kérdésében megadja pozitív egész számok egy tetszőleges S halmazát (olyan S halmazt is megadhat, amit már korábban is megadott), és azt kérdezi A-tól, hogy x eleme-e ennek az S halmaznak. B akárhány ilyen típusú kérdést feltehet. A-nak B minden kérdésére a kérdés elhangzása után azonnal igennel *vagy* nemmel *kell válaszolnia, de mindegyik válasza lehet hazugság is; az egyetlen kikötés az, hogy bármely egymás utáni $k+1$ válasz közül legalább egynek őszintének kell lennie.*

Miután B annyiszor kérdezett, ahányszor csak akart, meg kell neveznie egy legfeljebb n pozitív egész számból álló X halmazt. Ha x eleme az X halmaznak, akkor B nyer; különben B veszít. Bizonyítsuk be:

1. *Ha $n \geq 2^k$, akkor B-nek van nyerő stratégiája.*
2. *Minden elég nagy k-hoz van olyan $n \geq 1{,}99^k$ egész szám, amire B-nek nincs nyerő stratégiája.*

Janzer Olivér megoldása. *1. rész.* Nyilván nem változik a feladat, ha az $\{1,2,\dots,N\}$ halmaz helyett tetszőleges $\{a_1,a_2,\dots,a_N\}$ halmazból kerül ki x ($a_i \neq a_j$). Ha $n \geq 2^k$, megmutatjuk a nyerő stratégiát.

Ha $N \leq 2^k$, akkor az $X = \{a_1,a_2,\dots,a_N\}$ halmazra $|X| = N \leq$ $\leq 2^k \leq n$, így $|X| \leq n$, tehát X megfelelő, B nyert.

Tegyük fel, hogy $N > 2^k$.

N szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk be, hogy van nyerő stratégia. Tegyük fel, hogy $N=\ell$-re készen vagyunk (ahol $\ell \geq 2^k$). Bizonyítunk $N=(\ell+1)$-re. Kérdezzük meg az $S=\{a_1\}$ halmazt addig, amíg az első „igen” választ nem kapjuk. Ha végig „nem”-et kapunk, még $k+1$ kérdés után is, akkor $x \neq a_1$ (hiszen ekkor a „nem” igaz), így x az ℓ elemszámú $\{a_2,a_3,\dots,a_{\ell+1}\}$ halmazban van, így az indukciós feltétel szerint innen van nyerő stratégiánk. Tegyük fel egyébként, hogy a válasz egyszer „igen”. Rögtön ezután tegyük a következőt: vegyük az $a_2,a_3,\dots,a_{2^k+1}$ számokat ($2^k+1 \leq \ell+1$). Rendeljük a_j-hez a $(j-2)$ sorszámot. Ekkor kiosztottunk sorszámokat 0-tól (2^k-1)-ig. Kódoljuk a sorszámokat 2-es számrendszerben. Ezután tegyünk fel k darab kérdést, amelyek a következők:

1. x benne van abban a halmazban, amely halmaz a kiválasztott számok közül azokat tartalmazza, amelyek sorszámának 2-es számrendszerbeli alakjában az első jegy 0?

És így tovább, az i-edik kérdés a sorszám i-edik jegyére kérdez rá (2-es számrendszerben). Így, mivel 2^k sorszámot osztottunk ki 0-tól (2^k-1)-ig és ezeket 2-es számrendszerben k jegy kódolja:

$$0: \underbrace{00\ldots0}_{k}; \quad 1: \underbrace{00\ldots0}_{k-1}1; \quad \ldots; \quad 2^k-1: \underbrace{11\ldots11}_{k},$$

ezért k kérdéssel x sorszáma 2-es számrendszerbeli alakjának minden jegyére választ kapunk. Vegyük az utolsó $(k+1)$ darab feltett kérdésünket. Ezek között a feladat feltétele miatt lennie kell olyannak, amelyre A őszintén válaszolt. Ekkor azonban kizárhatjuk az olyan x-eket, amelyekre az igaz válaszok mindig az A által adott válaszok ellentétei. Belátjuk, hogy van ilyen szám. Az A által adott első válasz „igen”, ennek ellentéte „nem”, továbbá a következő k válasz tagadása meghatároz egy sorszámot, legyen ez a_t sorszáma $(2 \leq t \leq 2^k+1)$. Ekkor, mivel $a_1 \neq a_t$, azért x nem lehet a_t, ugyanis akkor az első kérdésre „nem” az őszinte válasz, a további kérdésekre pedig a_t definíciója szerint mindig az ellenkező, mint amit A adott. Ez azonban ellentmond a feladat $(k+1)$ egymást követő kérdésre vonatkozó feltételének. Így $x \neq a_t$. Ekkor x benne van egy ℓ elemű halmazban (az eredetiből elhagyjuk a_t-t), innen pedig az indukciós feltevés szerint van nyerő stratégiánk. Így a feladat első részének állítását igazoltuk.

2. rész. Megmutatjuk, hogy ha $1{,}99 < \lambda < 2$ és $n = \left[(2-\lambda)\lambda^{k+1}\right] - 1$, valamint $N = n+1$, akkor B-nek nincs nyerő stratégiája.

Jelöljük V-vel a B-nek azon kérdésére adott választ, hogy x benne van-e az S halmazban. Ekkor legyen V *inkonzisztens i-vel*, ha a válasz „igen” és i nem eleme S-nek; vagy ha a válasz „nem” és i eleme S-nek. Legyen egy adott pillanatban m_i az a szám, ami megadja, hogy A addig (a legutolsót is beleértve) hány egymást követő, i-vel inkonzisztens választ adott. Például, ha a válaszok minősítése az i szempontjából sorban ink.; nem ink.; ink.; ink., akkor éppen $m_i = 2$.

Legyen

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^{m_i}.$$

Legyen A válasza mindig olyan, hogy a válasza után a két lehetséges Φ érték közül a kisebbet kapjuk. Ehhez persze be kell látnunk, hogy ilyenkor A lépései szabályosak. Elég azt megmutatnunk, hogy $\Phi < \lambda^{k+1}$, hiszen akkor mindegyik m_i kisebb $(k+1)$-nél; viszont (legalább) $k+1$ egymást követő hazugság $k+1$ egymást követő inkonzisztens válasz lenne x-re nézve, amiből $m_x \geq k+1$ következne (a legalább $(k+1)$-edik inkonzisztens válasz után). Mindez azt jelenti, hogy a kívánt egyenlőtlenség mindenkori teljesülése esetén valóban nincs $k+1$ egymást követő hazugság, azaz A válaszai szabályosak.

$\Phi < \lambda^{k+1}$ igazolása: Kezdetben $m_1 = m_2 = \ldots = m_{n+1} = 0$, így $\Phi_0 = n+1$. Viszont

$$n+1 = \left[(2-\lambda)\lambda^{k+1}\right] \leq (2-\lambda)\lambda^{k+1} < \lambda^{k+1}$$

(hiszen $\lambda > 1$ miatt $2-\lambda < 1$). Így kezdetben $\Phi < \lambda^{k+1}$.

Tegyük fel, hogy valameddig $\Phi < \lambda^{k+1}$, majd vizsgáljuk a helyzetet A aktuális válaszát követően. Ennek során A-nak két lehetséges válasza volt: „igen”, ami után Φ_1 és „nem”, ami után Φ_2 keletkezik. Mivel ő a kisebbet választotta, azért $\Phi' \leq \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_2)$. Ha ezen kérdés az S halmazra kérdez rá, és a válasz előtt $m_1, m_2, \ldots, m_{n+1}$ voltak a megfelelő értékek, akkor

$$\Phi_1 = \sum_{i\in S} \lambda^0 + \sum_{j\notin S} \lambda^{m_j+1} \quad \text{és} \quad \Phi_2 = \sum_{i\in S} \lambda^{m_i+1} + \sum_{j\notin S} \lambda^0,$$

így

$$\begin{aligned}
\Phi' &\leq \frac{1}{2}(\Phi_1+\Phi_2) = \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{i\in S}\left(\lambda^{m_i+1}+1\right) + \sum_{j\notin S}\left(\lambda^{m_j+1}+1\right)\Bigg) = \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\bigg(\sum_{i\in S}\lambda^{m_i+1} + \sum_{j\notin S}\lambda^{m_j+1}\bigg) + \bigg(\sum_{i\in S}1 + \sum_{j\notin S}1\bigg)\Bigg) = \\
&= \frac{1}{2}\Bigg(\sum_{h=1}^{n+1}\lambda^{m_h+1} + \sum_{h=1}^{n+1}1\Bigg) = \\
&= \frac{1}{2}(\lambda\Phi + n + 1).
\end{aligned}$$

Mivel $\Phi < \lambda^{k+1}$ és $n+1 = \left[(2-\lambda)\lambda^{k+1}\right] \leq (2-\lambda)\lambda^{k+1}$,

$$\Phi' \leq \frac{1}{2}(\lambda\Phi + n + 1) < \frac{1}{2}\left(\lambda^{k+2} + (2-\lambda)\lambda^{k+1}\right) = \lambda^{k+1}.$$

Tehát Φ nem lépi át λ^{k+1}-t.

Így A válaszai szabályosak. Viszont mivel ezek x-től függetlenek, B nyilván nem találhatja ki x-et. Tehát ebben az esetben B-nek nincs nyerő stratégiája. Belátjuk, hogy elegendően nagy k esetén n megfelelő, azaz

$$n \geq 1{,}99^k \cdot n = \left[(2-\lambda)\lambda^{k+1}\right] - 1.$$

Először belátjuk, hogy

$$(2-\lambda)\lambda^{k+1} \geq 1{,}99^{k+1} \iff \left(\frac{\lambda}{1{,}99}\right)^{k+1} > 1/(2-\lambda),$$

ami $\lambda > 1{,}99$ miatt nyilván igaz. Ekkor azonban (elég nagy k-ra)

$$n = \left[(2-\lambda)\lambda^{k+1}\right] - 1 \geq (2-\lambda)\lambda^{k+1} - 2 \geq 1{,}99^k.$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.

4. *Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt, amire tetszőleges a, b, c egészekre, amelyekre $a+b+c=0$ teljesül, fennáll az*

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$

egyenlőség. ($\mathbb{Z}$ *az egész számok halmazát jelöli.*)

1. eset: A függvénynek nincs más nullhelye. Jelöljük $f(1)$ értékét d-vel.

Az $a=b=1$, $c=2$ választással

$$2f(1)^2 + f(2)^2 = 2f(1)f(1) + 4f(2)f(1).$$

Ebből $f(2) \neq 0$ miatt $f(2) = 4f(1) = 4d$. Ugyanígy $a=b=2$, $c=4$-ből $f(4) = 16d$. Az $a=3$, $b=2$, $c=1$ választással $f(3)$-ra egy másodfokú egyenletet kapunk:

$$\big(f(3)-d\big)\big(f(3)-9d\big) = 0.$$

Ha itt $f(3) = d$, akkor $a=4$, $b=3$, $c=1$-ből ellentmondást kapunk, mert behelyettesítve az értékeket kapjuk, hogy $256d^2 + d^2 + d^2 = 32d^2 + 2d^2 + 32d^2$, ami lehetetlen.

Tehát $f(3) = 9d$, $f(4) = 16d$.

Innen teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $f(n) = n^2 d$.

Tegyük fel, hogy minden $0 < k < n$-re teljesül, hogy $f(k) = k^2 d$. Ebből $a=n$, $b=n-1$, $c=1$ választással

$$f(n)^2 + f(n-1)^2 + f(1)^2 = 2f(n)\big(f(n-1)+f(1)\big) + 2f(1)f(n-1),$$

$a=n$, $b=n-2$, $c=2$-vel pedig:

$$f(n)^2 + f(n-2)^2 + f(2)^2 = 2f(n)\big(f(n-2)+f(2)\big) + 2f(2)f(n-2).$$

A két egyenletet kivonva egymásból és behelyettesítve az ismert értékeket valóban azt kapjuk, hogy $f(n) = n^2 d$. Ezzel az indukció teljes. Ha tehát nincs más nullhely, akkor $f(n) = n^2 d$.

2. eset: Ha van más (pozitív) nullhely, akkor válasszuk ki a legkisebbet, legyen ez $a > 0$, tehát $f(a) = 0$.

Minden x-re teljesül – az $a=a$, $b=x$, $c=a+x$ választás miatt –

$$f(x)^2 + f(a+x)^2 = 2f(x)f(a+x),$$

ezért $f(x) = f(a+x)$, tehát a függvény periodikus a szerint. Így nyilvánvalóan minden nullhely osztható a-val, pontosabban: a nullhelyek éppen az a többszörösei.

Ezek után vizsgáljuk a lehetséges értékeit. Ha $a \geq 5$, akkor az első eset bizonyítását megismételhetjük, mivel az csak $f(1), f(2), f(3), f(4) \neq 0$-ra alapult. Ezzel azt kapnánk, hogy más nullhely már nem lehet, ami ellentmondás; tehát $a \leq 4$.

Ha $a = 4$, akkor $f(1) = d \neq 0, f(2) = 4d$ és

$$f(3) = f(3-a) = f(-1) = f(1) = d.$$

Ha $a = 3$, akkor $f(1) = d \neq 0, f(2) = 4d$, de $f(1) = f(-1) = f(3-1) = 4d$, ami ellentmondás.

Ha $a = 2$, akkor $f(1) = d \neq 0, f(2) = 0$.

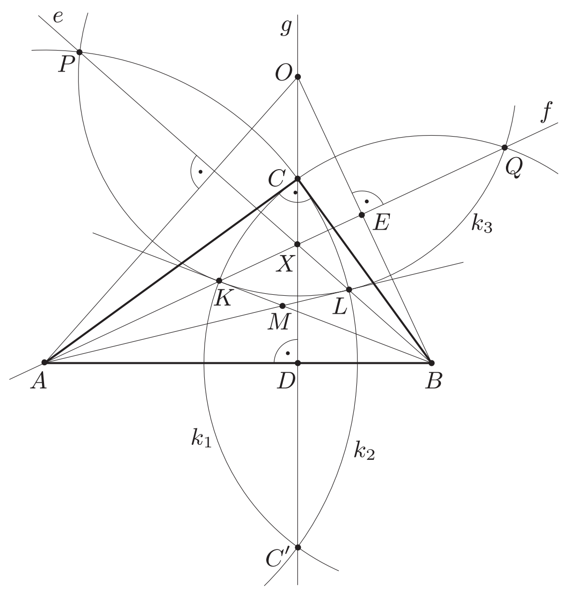
Ha $a = 1$, akkor f a konstans 0 függvény.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a ki nem zárt függvények (minden $d \neq 0$-val) valamennyien megoldásai a feladatnak.

5. *Legyen az ABC háromszögben $BCA\sphericalangle = 90°$, és legyen D a C-ből induló magasságvonal talppontja. Legyen X a CD szakasz belső pontja. Legyen K az AX szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$. Hasonlóan, legyen L a BX szakasznak az a pontja, amire $AL = AC$. Legyen M az AL és BK egyenesek metszéspontja.*

Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.

Ódor Gergely megoldása. Az A és X, B és X, valamint C és D pontok által meghatározott egyeneseket nevezzük rendre f-nek, e-nek és g-nek. Húzzuk meg a B középpontú, $\overline{BC}$ sugarú k_1 és az A középpontú, $\overline{AC}$ sugarú k_2 köröket. A g egyenes k_1 és k_2 hatványegyenese, mivel merőleges a körök $\overline{AB}$ centrálisára és átmegy az egyik metszésponton, C-n.



Tudjuk, hogy a k_1 körnek az f egyenessel való, A-hoz közelebbi metszéspontja K. A másik metszéspontot nevezzük Q-nak. Hasonlóan a k_2 kör és az e egyenes B-hez közelebbi metszéspontja L, a másikat pedig jelölje P.

1. állítás: $XPK\triangle \sim XQL\triangle$.

Bizonyítás: Mivel X a hatványegyenes egyik pontja,

$$\overline{XK}\cdot\overline{XQ}=\overline{XL}\cdot\overline{XP}.$$

Átalakítva

$$\frac{\overline{XK}}{\overline{XP}}=\frac{\overline{XL}}{\overline{XQ}}.$$

Az XPK és XQL háromszögek két oldalának aránya és az oldalak által bezárt szög (csúcsszögek miatt) megegyezik. Tehát $XPK\triangle \sim XQL\triangle$.

Következmény: A $KPQL$ négyszög húrnégyszög, mert

$$PLQ\sphericalangle = PKQ\sphericalangle.$$

A $KPQL$ körülírt körét jelölje k_3, középpontját pedig O.

2. állítás: Az AL egyenes érinti k_3-at.

Bizonyítás: $\overline{AC}\perp\overline{BC}$ és $\overline{BC}$ a k_1 kör sugara, tehát A-nak a k_1 körre vonatkozó hatványa $=\overline{AC}^2$. Mivel A rajta van a QK egyenesen, rajta van k_1 és k_3 hatványegyenesén. Ebből következik, hogy a k_3 körre vonatkozó hatványa is

$$\overline{AC}^2=\overline{AL}^2.$$

Tehát az A-ból k_3-hoz húzott érintő szakaszok hossza $\overline{AL}$. A k_3 körön legfeljebb két olyan pont lehet, amely A-tól $\overline{AL}$ távolságra van. Mivel P és L ilyen és e körhöz A-ból két érintő húzható, mindkét pont érintési pont. (A kívül esik a k_3 körön, mivel rajta van a hatványvonalon és kívül van a k_1 körön, hiszen $\overline{AB}>\overline{BC}$).

Hasonlóan látható be a

3. állítás: A BK egyenes érinti k_3-at.

Mivel $\overline{ML}$ és $\overline{MK}$ a k_3 körhöz húzott érintő szakaszok, egyenlő hosszúak. Ezzel igazoltuk a feladat állítását.

6. *Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyhez találhatók olyan $a_1,a_2,\dots,a_n$ nemnegatív egészek, amelyekre teljesül*

$$\frac{1}{2^{a_1}}+\frac{1}{2^{a_2}}+\ldots+\frac{1}{2^{a_n}}=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{2}{3^{a_2}}+\ldots+\frac{n}{3^{a_n}}=1.$$

Azt fogjuk bizonyítani, hogy akkor és csak akkor léteznek megfelelő $a_1,a_2,\dots,a_n$ nemnegatív egészek, ha $n\equiv 1,2 \pmod 4$.

A feltétel szükséges voltának igazolásához hozzuk közös nevezőre az

$$1=\frac{1}{3^{a_1}}+\frac{1}{3^{a_2}}+\ldots+\frac{1}{3^{a_n}}$$

összeget: megfelelő $b_0, b_1, \ldots, b_n$ egészekre

$$1 = \frac{3^{b_1} + 2\cdot 3^{b_2} + \ldots + n\cdot 3^{b_n}}{3^{b_0}}.$$

Elég észrevenni, hogy i és $i \cdot 3^{b_i}$ paritása azonos, így az $1+2+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ összeg páratlan. Ez valóban azt vonja maga után, hogy $n \equiv 1, 2 \pmod 4$.

Legyen S az egész számokból álló végtelen sorozatok halmaza, és legyen azon értelmezett két függvény:

$$f\colon S \to \mathbb{R}, \quad f\colon (a_1, a_2, \ldots) \to \sum_{a_i \geq 0,\ i \in N} \frac{1}{2^{a_i}},$$

$$g\colon S \to \mathbb{R}, \quad g\colon (a_1, a_2, \ldots) \to \sum_{a_i \geq 0,\ i \in N} \frac{i}{3^{a_i}}.$$

Az $s = (a_1, a_2, \ldots) \in S$ sorozat *jó*, ha van olyan n pozitív egész szám, amelyre $a_i \geq 0 \iff i \leq n$ és $f(s) = g(s) = 1$. Azt kell tehát bizonyítani, hogy minden $n \equiv 1, 2 \pmod 4$ esetén létezik jó sorozat.

Teljes indukciót alkalmazunk. Tegyük fel, hogy egy $n \geq 12$ egészhez található egy jó $s = (a_1, a_2, \ldots)$ sorozat. Belátjuk, hogy ebből konstruálható egy jó sorozat $n+12$-re a következő kétféle módosítás segítségével:

1. ha az $s = (a_1, a_2, \ldots) \in S$ sorozatban $a_k \geq 0$, de $a_{2k} < 0$, akkor $f(s) = f(s')$ és $g(s) = g(s')$, ahol $s' = (b_1, b_2, \ldots)$, $a_i = b_i$, ha $i \neq k, 2k$, $b_k = b_{2k} = a_k + 1$.

2. ha az $s = (a_1, a_2, \ldots) \in S$ sorozatban $a_k \geq 0$, de $a_\ell, a_m < 0$, és $3k = \ell + m$, akkor $f(s) = f(s')$ és $g(s) = g(s')$, ahol $s' = (b_1, b_2, \ldots)$, $a_i = b_i$, ha $i \neq k, \ell, m$, $b_k < 0$, $b_\ell = b_m = a_k + 1$.

Feltéve, hogy n-re létezik jó s sorozat, vagyis $f(s) = g(s) = 1$, a fenti kétféle módosításokkal kapott s' sorozatra is $f(s') = g(s') = 1$. Emiatt már csak azt kell garantálni, hogy s'-ben az első $n+12$-nél nem nagyobb indexű tagok nemnegatívak, az összes többi pedig negatív legyen.

Mivel feltettük, hogy $n \geq 12$, az $a_{n+1}, \ldots, a_{n+12}$ tagok közül a páros indexűeket 1-es típusú lépésekkel nemnegatívba tudjuk vinni. Ezután a 6 db páratlan indexű tag párokba rendezhető úgy, hogy a párosított tagok indexeinek összege osztható 12-vel, hiszen az indexek 12-es maradéka 1, 3, 5, 7, 9, 11 valamilyen sorrendben. Ezeket a párokat a 2-es típusú lépést alkalmazva tudjuk nemnegatívvá tenni. Ha egy ilyen lépés eredményeképpen az a_ℓ és az a_m tag vált nemnegatívvá, akkor a (páros indexű) $a_{\frac{\ell+m}{3}}$ tag negatívvá változik, amit egy 1-es típusú átalakítással újra nemnegatívba tudunk vinni.

Végül megadunk egy-egy megfelelő $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sorozatot n kis értékei esetén:

$n=1$	$(0, \ldots)$,
$n=2$	$(1, 1, \ldots)$,
$n=5$	$(2, 1, 3, 4, 4, \ldots)$,
$n=6$	$(2, 1, 3, 5, 5, 4, \ldots)$,
$n=9$	$(2, 1, 3, 7, 5, 4, 8, 8, 6, \ldots)$,
$n=10$	$(2, 1, 3, 7, 6, 4, 8, 8, 6, 6, \ldots)$,
$n=13$	$(1, 4, 5, 5, 5, 6, 4, 5, 4, 5, 4, 6, 4, \ldots)$,
$n=14$	$(1, 4, 5, 5, 5, 6, 5, 5, 4, 5, 4, 6, 4, 5, \ldots)$,
$n=17$	$(2, 1, 5, 6, 6, 5, 7, 6, 7, 6, 6, 5, 6, 7, 7, 6, 6, \ldots)$,
$n=18$	$(2, 1, 5, 6, 6, 5, 7, 6, 8, 6, 6, 5, 6, 7, 7, 6, 6, 8, \ldots)$,
$n=21$	$(2, 1, 3, 8, 6, 7, 9, 8, 7, 7, 10, 7, 10, 9, 6, 9, 7, 7, 7, 7, 6, \ldots)$,
$n=22$	$(2, 1, 3, 8, 6, 7, 9, 8, 7, 7, 11, 7, 10, 9, 6, 9, 7, 7, 7, 7, 6, 11, \ldots)$,

Ezzel a teljes indukció elvének megfelelően az állítás bizonyított.