Ismert, hogy a háromszög t területére, beírt és hozzáírt köreinek ϱ, ϱ_a, ϱ_b és ϱ_c sugaraira, valamint s félkerületére érvényesek a következő összefüggések:

$$t = \varrho \cdot s = \varrho_a(s-a) = \varrho_b(s-b) = \varrho_c(s-c).$$

Feladatunkban – mivel nyilván a beírt kör a legkisebb és bármelyik két sugár hossza különböző – föltehetjük, hogy az oldalak nagyságviszonya: $a < b < c$. Ezért

$$\varrho_a = q \cdot \varrho, \qquad \varrho_b = q^2 \cdot \varrho, \qquad \varrho_c = q^3 \cdot \varrho,$$

ahol q a mértani sorozat hányadosa ($q > 1$).

Ezek szerint

$$q = \frac{\varrho_a}{\varrho} = \frac{\varrho_c}{\varrho_b}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{s}{s-a} = \frac{s-b}{s-c}, \tag{1}$$

$$s(s-c) = (s-b)(s-a),$$

$$(a+b+c)(a+b-c) = (c+a-b)\big(c-(a-b)\big),$$

$$(a+b)^2 - c^2 = c^2 - (a-b)^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

tehát Pitagorasz tételének megfordítása szerint a háromszög csak derékszögű lehet – ha egyáltalán létezik –, más szóval legnagyobbik szöge csak $\gamma = 90^\circ$ lehet.

Mivel azonban ennek megállapításában (1)-ben csak két arányt használtunk fel, azt még nem tudjuk, van-e olyan derékszögű háromszög, amelyben a

$$\frac{\varrho_b}{\varrho_a} = q$$

követelmény is teljesül. Ennek tisztázására a verseny ideje nem lett volna elegendő (lásd az alábbi 3. megjegyzést).

Megjegyzések. 1. Néhányan még ismerik az itt következő képleteket, amelyek alapján numerikus példában „kényelmesebben” (azaz logaritmustáblázattal) számíthatók a szögek az oldalakból, mint a „nehézkes” cosinustétellel:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}, \qquad \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}, \qquad \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}.$$

(A további két szögre vonatkozó hasonló képletek természetesen az oldalak ciklikus permutációjával írhatók föl, ami közben persze s változatlan marad.)

Az első képlet alapján közvetlenül

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\varrho \cdot \varrho_c}{\varrho_a \cdot \varrho_c}} = \sqrt{\frac{\varrho^2 q^3}{\varrho^2 q^3}} = 1,$$

$\frac{\gamma}{2} = 45^\circ$, $\gamma = 90^\circ$. Itt a háromszög létezése biztos, mert a képletek csak nemlétező háromszögek esetére adnak értelmetlen eredményt.

2. Az említett képletek – és több hasonló is – a matematikának – pontosabban a számítások végrehajtása technikájának – abból a korszakából valók, amikor a végrehajtás legfejlettebb eszköze a logaritmustáblázat volt. Arra a korszakra következtek – csak nagy ugrásokban nézve – a fogaskerekekkel működő asztali számológépek, előbb kézi, majd motoros működtetéssel, ma pedig az elektronikus kalkulátorok. (A logarlécet kihagytuk, ez amazok mellett csak gyors becslésekre való.) – A képletek persze ma is érvényesek. – Szerepel azonban a $\operatorname{tg} x/2$ pl. bizonyos integrálok transzformálásában is; de felsorolni sem lehet az ilyenféle, az elméletben is jól felhasználható apró fogásokat.

3. A $\varrho_b : \varrho_a = q$ követelményt is teljesítő derékszögű háromszög nagyobbik hegyes szöge felének tangensére harmadfokú egyenletet kapunk. A föntebbihez hasonlóan

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \sqrt{\frac{\varrho \cdot \varrho_b}{\varrho_a \cdot \varrho_c}} = \frac{1}{q} \qquad \text{és}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{q^2}$$

(vagyis a félszögek tangensei is mértani sorozatot alkotnak, 3 elemmel, ugyanazzal a hányadossal). Ezek alapján

$$\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}=\frac{1}{q^2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)=$$

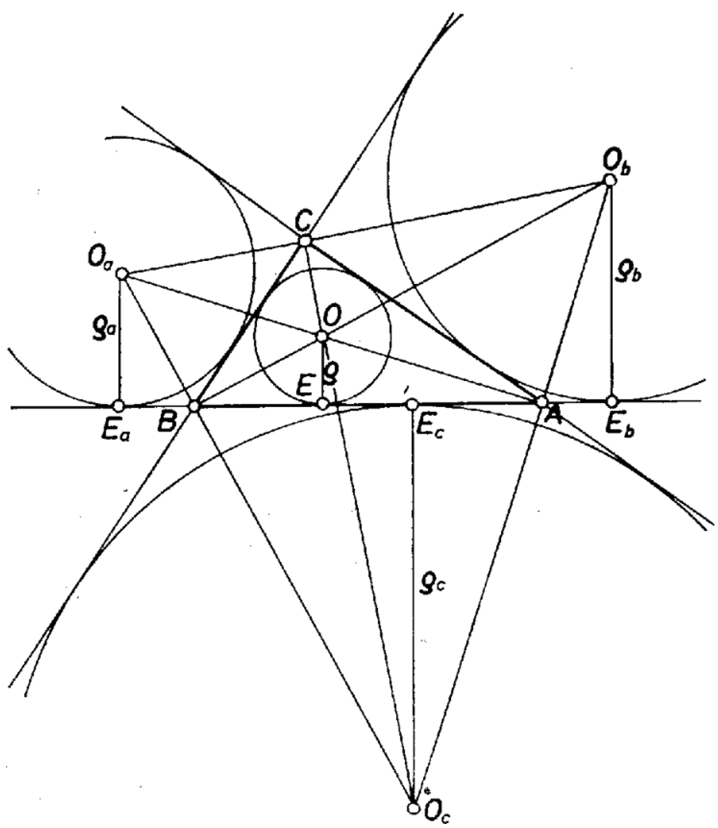
$$=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{1-\frac{1}{q}}{1+\frac{1}{q}}=\frac{q-1}{q+1},$$

$$q^3-q^2-q-1=0.$$

(Ez a „szép” egyenlet számos más, egyszerűen megfogalmazható probléma megoldásában is fel-felbukkan.) Közelítő megoldása:

$$q=1{,}83929,\qquad \alpha=32^\circ56'6'',\qquad \beta=57^\circ3'54''.$$

II. megoldás. Az előző megoldás jelölésein túl legyenek a háromszög csúcsai A, B, C, a beírt kör középpontja O, a hozzáírt köröké rendre O_a, O_b, O_c úgy, hogy az O_a középpontú kör az AB, AC oldalak meghosszabbításait érinti, valamint a BC oldalt kívülről, és így tovább. Így az OO_a egyenes a BAC szöget felezi, az O_bO_c pedig az A-nál levő külső szögeket, tehát merőleges OA-ra. O az $O_aO_bO_c$ háromszögre nézve magasságpont, és belső pontja a háromszögnek, tehát ez a háromszög hegyesszögű.



Jelöljük a körök érintési pontját az AB egyenesen rendre E, E_a, E_b, E_c-vel. Így az AOE és AO_aE_a, valamint az AO_bE_b és AO_cE_c hasonló derékszögű háromszög-párokból

$$\frac{AO_a}{AO}=\frac{E_aO_a}{EO}=\frac{\varrho_a}{\varrho}=q=\frac{\varrho_c}{\varrho_b}=\frac{E_cO_c}{E_bO_b}=\frac{AO_c}{AO_b}.$$

(A q-tól jobbra látható elemek logikai sorrendje jobbról balfelé olvasva ugyanaz, mint a többieké balról q-ig.) Végezzünk kis cserét a sor két végén álló arányokban:

$$\frac{AO_a}{AO_c}=\frac{AO}{AO_b},$$

eszerint az AO_aO_c és AOO_b derékszögű háromszögek befogóinak aránya egyenlő. Ezért ez a két háromszög hasonló. Egy-egy megfelelő szögükre és az utóbbinak a csúcsszögére

$$AO_aO_c\sphericalangle(=OO_aB\sphericalangle)=AOO_b\sphericalangle=O_aOB\sphericalangle,$$

ez pedig azt jelenti, hogy a B-nél derékszögű OO_aB háromszög hegyesszögei egyenlők, tehát mindegyik $45°$.

Másfelől az OO_a szakasz fölötti Thalész-kör átmegy B-n és C-n, és ezek OO_a-nak átellenes oldalán vannak, ezért

$$\frac{ACB\sphericalangle}{2} = OCB\sphericalangle = OO_aB\sphericalangle = 45°,$$

tehát $ACB\sphericalangle = 90°$, akkor pedig ez az ABC háromszög legnagyobb szöge. Ezzel megkaptuk a választ a feladat kérdésére.