Emelt szintű gyakorló feladatsor

Számadó László
Budapest

I. rész

1. Egy téglalap oldalainak aránya 1 : 2. Tudjuk, hogy a terület mérőszáma egyenlő a kerület és az átlók hosszának összegét jelölő mérőszámmal. Határozzuk meg a téglalap egy csúcsának távolságát a csúcsot nem tartalmazó átlótól. (*11 pont*)

2. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2-8x+8y=0,\\ xy-3x-y=0.\end{aligned}\right\}$$

(*12 pont*)

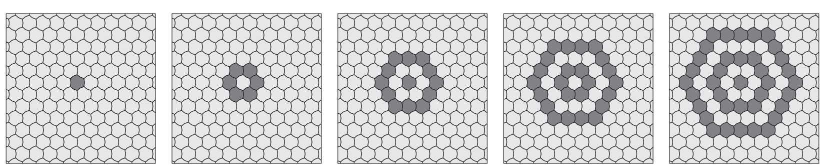
3. A térkövezéshez nagyon sokféle alakú és színű kő vásárolható. Az *ábrákon* az úgynevezett fodorkövet, és az ebből kialakítható mintasorozatot látjuk.

a) Hány darab sötétszürke kő szükséges a hatodik mintához?

b) Hányadik mintához kell pontosan 150 darab sötétszürke kő?

c) Adjuk meg rekurzív képlettel a sötétszürke kövek számát az n-edik mintában.

(*14 pont*)



4. Egy iskolai sakkbajnokságon mindenki pontosan egyszer játszott mindenkivel. 63 játszma után még mindenkinek négy játszmája hátravolt.

a) Hányan szerepeltek összesen a bajnokságon?

b) Ekkor két véletlenszerűen kiválasztott játékossal beszélgetett az iskolaújság egyik szerkesztője. Mekkora a valószínűsége, hogy ők még nem játszottak egymással? (*14 pont*)

II. rész

5. *a*) Ha 2-vel csökkentjük az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyökeit, akkor az $ax^2+cx+b=0$ egyenlet gyökeit kapjuk. Adjuk meg az eredeti egyenlet együtthatóit, ha tudjuk, hogy az összegük -3.

b) Az $ax^2+bx+c=0$ egyenletben az együtthatók egy növekedő számtani sorozat három egymást követő tagjai, az

$$(a+2)x^2+bx+(c+2)=0$$

egyenletben az együtthatók pedig egy mértani sorozat három egymást követő tagjai. Van-e valós megoldása az első egyenletnek, ha az együtthatóinak összege 9?

c) Az $ax^2+bx+c=0$ másodfokú egyenlet két zérushelye x_1 és x_2. Írjunk fel egy olyan harmadfokú egyenletet gyöktényezős alakban, amelynek zérushelyei: x_1x_2; $x_1^2+x_2^2$; $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$. (*16 pont*)

6. Az $x^2+y^2=25$ egyenletű kör, az

$$f(x)=\frac{|x+2|+|x-2|-2}{2}$$

hozzárendeléssel megadott függvény képe és az abszcisszatengely egy síkidomot határoznak meg, amit az abszcisszatengely körül megforgatunk. Mekkora az így kapott forgástest térfogata? (*16 pont*)

7. *a*) Igazoljuk, hogy $\sqrt{31+8\sqrt{15}}+\sqrt{31-8\sqrt{15}}$ egész szám.

b) Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sqrt{\left(31+8\sqrt{15}\right)^x}+\sqrt{\left(31-8\sqrt{15}\right)^x}=\frac{10}{3}. \qquad (16\ pont)$$

8. Egy szabadtéri színpad hátsó részén egy 12 m magas oszlop áll, melynek a súgólyuktól a teteje 16°-os emelkedési szögben látszik. Az oszlop talppontját és a súgólyukat összekötő egyenes fölött van egy emelvény, amelyről a 180 cm magas színész 22°-os emelkedési szögben látja az oszlop tetejét. A súgólyuktól a színész feje búbja 10°-os emelkedési szögű.

a) Igazoljuk, hogy a színész feje egyenlő távolságra van az oszlop tetejétől és a súgólyuktól.

b) Milyen magas a színpadon felépített emelvény? (*16 pont*)

9. *a*) Egy dobozba 100 darab piros és zöld építőkockát raktak, méretük alapján kicsiket és nagyokat is. Kis piros kocka véletlenszerű kihúzásának ugyanannyi a valószínűsége, mint annak, hogy nagy pirosat vagy kis zöldet húzunk a dobozból. A zöldek és a kicsik aránya 7 : 11. A nagyok 20-szal kevesebben vannak, mint a pirosak. Hány kocka van az egyes fajtákból?

b) Egy dobozba 93 darab piros és zöld építőkockát raktak, méretük alapján kicsiket és nagyokat is. Mindegyik fajtából különböző prímszám darab van. A piros kockák száma osztható héttel. A kis zöld kockákból van a legkevesebb. Nagy pirosból ötvennel több van, mint kis pirosból. Hány kocka van az egyes fajtákból?

(*16 pont*)