

Megoldásvázlatok a 2012/7. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. Melyik az a három természetes szám, melyek egy számtani sorozat egymást követő elemei, négyzetösszegük 264, valamint a szorzatuk egyenlő 1792 és a középső szám hányadosával? (10 pont)

Megoldás. A számtani sorozat három egymást követő tagja: $b - d$, b , $b + d$, ahol b a középső elem és d a sorozat differenciája. A feladat szövege szerint:

$$(b - d)^2 + b^2 + (b + d)^2 = b^2 - 2bd + d^2 + b^2 + b^2 + 2bd + d^2 = 3b^2 + 2d^2 = 264,$$

$$(b - d)b(b + d) = b(b^2 - d^2) = b^3 - bd^2 = \frac{1792}{b}.$$

Az így kapott egyenletrendszer:

$$\left. \begin{array}{l} 3b^2 + 2d^2 = 264 \\ b^4 - b^2d^2 = 1792 \end{array} \right\}.$$

Az első egyenletből: $d^2 = 132 - \frac{3}{2}b^2$, ezt behelyettesítve a másodikba:

$$b^4 - b^2 \left(132 - \frac{3}{2}b^2 \right) = 1792.$$

Ebből átalakításokkal b^2 -re nézve a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

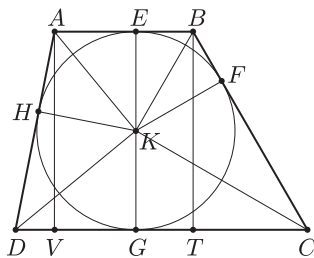
$$5b^4 - 264b^2 - 3584 = 0,$$

melynek egyik gyöke negatív, ezért nem lehet négyzetszám, a másik gyöke $b^2 = 64$, azaz $b = 8$ (a $b = -8$ nem lehet, hiszen b természetes szám). Visszahelyettesítünk az első egyenletbe, így kapjuk, hogy $d = 6$.

Tehát a három természetes szám a 2, 8 és 14.

2. Mekkora annak az érintőtrapéznek a területe, amelynek egyik szára a 7 cm hosszú párhuzamos oldallal 120 fokos szöget zár be, valamint beírt körének sugara 5 cm? (13 pont)

Megoldás. Az ábrán a feladatban szereplő trapéz méretarányos rajzát látjuk, ahol $AB = 7$, $KE = KF = KG = KH = 5$ és $\angle ABC = 120^\circ$. Használjuk az ábra jelöléseit.



A trapéz magassága a beírt kör átmérője, azaz $AV = EG = BT = 10$. A terület kiszámításához a DC hosszára van szükség. $\angle TCB = 60^\circ$, ezért a TCB derékszögű háromszögben $BT = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot TC = \sqrt{3} \cdot TC$, innen $TC = \frac{10}{\sqrt{3}} \approx 5,77$.

A DV szakasz hosszát az ADV derékszögű háromszögben kiszámolhatjuk, ehhez szükség van még egy szögre. Tudjuk, hogy a KEB derékszögű háromszögben B -nél 60° -os szög van. Ezért

$$KE = \frac{\sqrt{3}}{2}KB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 \cdot EB = \sqrt{3} \cdot EB,$$

innen $EB = \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 2,89$, vagyis $AE = 7 - 2,89 = 4,11$. Ezt felhasználva az AEK derékszögű háromszögben $\tan \angle EAK = \frac{5}{4,11}$, innen $\angle EAK = 50,58^\circ$.

$$\angle DAV = 2 \cdot \angle EAK - 90^\circ = 2 \cdot 50,58^\circ - 90^\circ = 11,16^\circ,$$

azaz

$$DV = AV \cdot \operatorname{tg} 11,16^\circ = 10 \cdot \operatorname{tg} 11,16^\circ \approx 1,97.$$

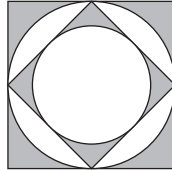
A keresett $DC = DV + VT + TC = 1,97 + 7 + 5,77 = 14,74$. A trapéz területe:

$$T = \frac{AB + DC}{2} \cdot AV = \frac{7 + 14,74}{2} \cdot 10 = 108,7 \text{ (cm}^2\text{)}.$$

3. Az ábrán egy egység oldalú négyzet, annak beírt köre, oldalfelező pontjai által meghatározott négyzet és annak is a beírt köre látható.

a) Hány százalékát színeztük ekkor szürkére a nagy négyzetnek?

b) Ismételjük meg ezt az eljárást végtelen sokszor. Hány százalékát színeztük így szürkére a nagy négyzetnek? (14 pont)



Megoldás. a) A szürke terület a nagy négyzet és a nagy kör, illetve a kis négyzet és a kis kör területkülönbségének összege, vagyis:

$$T_{\text{szürke}} = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \pi + \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 \pi = 1 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\pi \approx 0,322.$$

Tehát a négyzet területének kb. 32,2%-a szürke.

b) Észrevehetjük, hogy az egymásba írt négyzetek oldalai, illetve körök sugarai egy-egy mértani sorozatot alkotnak. Ezért a szürke terület:

$$T_{\text{szürke}} = 1 - \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\pi + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots\right) \pi.$$

A kérdéses terület meghatározásához két mértani sort kell összegeznünk:

$$T_{\text{szürke}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} \pi = 2 - \frac{1}{2}\pi \approx 0,429.$$

Vagyis ebben az esetben a négyzet kb. 42,9%-a szürke.

Megjegyzés: A feladat mértani sorozat nélkül is megoldható.

4. Adjuk meg azt a két egymást követő egész számot, amelyek közé esik a következő összeg:

$$\lg\left(11 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}\right) + \lg\left(11^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \lg\left(11^3 \cdot \sqrt{\frac{5}{7}}\right) + \dots + \lg\left(11^{500} \cdot \sqrt{\frac{999}{1001}}\right).$$

(14 pont)

Megoldás. Használjuk a szorzat logaritmusára vonatkozó azonosságot:

$$\lg 11 + \lg \sqrt{\frac{1}{3}} + \lg 11^2 + \lg \sqrt{\frac{3}{5}} + \lg 11^3 + \lg \sqrt{\frac{5}{7}} + \dots + \lg 11^{500} + \lg \sqrt{\frac{999}{1001}}.$$

Csoportosítsuk a tagokat:

$$(\lg 11 + \lg 11^2 + \dots + \lg 11^{500}) + \left(\lg \sqrt{\frac{1}{3}} + \lg \sqrt{\frac{3}{5}} + \dots + \lg \sqrt{\frac{999}{1001}}\right).$$

Az első zárójeles kifejezést tovább alakítjuk, a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság felhasználásával:

$$\begin{aligned} \lg 11 + \lg 11^2 + \dots + \lg 11^{500} &= 1 \cdot \lg 11 + 2 \cdot \lg 11 + \dots + 500 \cdot \lg 11 = \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + 500) \cdot \lg 11 = \frac{500 \cdot (500 + 1)}{2} \cdot \lg 11 = 125\,250 \cdot \lg 11. \end{aligned}$$

Most a második zárójelben lévő összeget hozzuk egyszerűbb alakra:

$$\begin{aligned} \lg \sqrt{\frac{1}{2}} + \lg \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots + \lg \sqrt{\frac{999}{1000}} &= \lg \left(\sqrt{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{3}{5}} \dots \sqrt{\frac{999}{1001}} \right) = \\ &= \lg \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \dots \cdot \frac{999}{1001}} = \lg \sqrt{\frac{1}{1001}}. \end{aligned}$$

A keresett összeg: $125\,250 \cdot \lg 11 + \lg \sqrt{\frac{1}{1001}} \approx 130\,432,93$.

A két egymást követő egész szám: 130 432 és 130 433.

II. rész

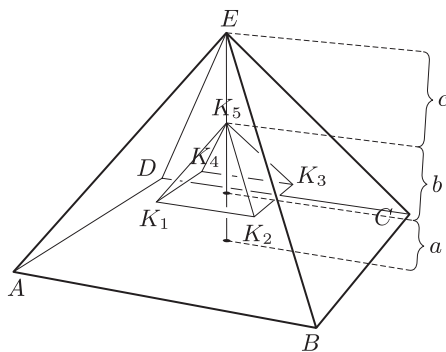
5. A 2 cm sugarú gömb alakú bonbonokat ötösével négyzet alapú, gúla alakú dobozokba csomagolják úgy, hogy négy kerül alulra, egy a tetejére. Minden alsó gömb érinti a felsőt és két szomszédos alsót, továbbá érinti a gúla alaplapját és két szomszédos oldallapját. A felső gömb mind a négy oldallapot érinti.

a) Milyen magas a doboz?

b) Mekkora a doboz felszíne?

(16 pont)

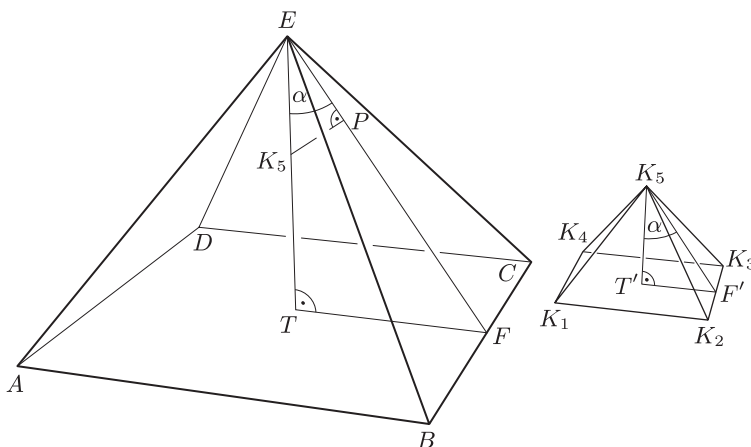
Megoldás. a) A feladat szövege szerint a gömbök K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 középpontjai az $ABCD$ dobozhoz hasonló, olyan négyzet alapú kis gúlát határoznak meg, melynek minden éle 4 cm, a magasságegyenesre pedig egybeesik a „doboz” magasságegyenesével. (Ezek a gömbközpontok a doboz megfelelő lapjaitól 2-2 centiméterre vannak.) A doboz magasságát a gúla három részre osztja.



Van egy alsó rész, ez $a = 2$, mert ilyen távol vannak az alsó gömbök középpontjai az alaplaptól, azaz a kis gúla alaplapja a doboz aljától.

A második darab a kis gúla magassága, ezt a szakaszt a magasság, az egyik oldalél és az alaplap átlójának fele által meghatározott derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel segítségével számoljuk ki:

$$b^2 = 4^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 \right)^2 = 16 - 8 = 8, \quad \text{ebből} \quad b = \sqrt{8} \approx 2,83.$$

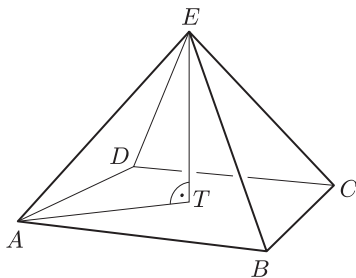


A harmadik, a felső szakasz meghatározásához azt a derékszögű háromszöget használjuk, melynek csúcsai: a két gúla csúcsa, és a felső gömb egyik oldallappal vett érintési pontja (azaz az EPK_5 háromszög). Ennek a háromszögnek a keresett c szakasz az átfogója, 2 cm az egyik befogója, vagyis $\sin \alpha = \frac{2}{c}$. Ennek a szögnek a szinusza a gúla két szemközti oldallapjának magassága által α meghatározott síkmetszeten, a $K_5T'F'$ derékszögű háromszögben is felírható:

$$\sin \alpha = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \text{azaz} \quad c = \frac{2}{\sin \alpha} = 2\sqrt{3} \approx 3,46.$$

A doboz magassága tehát: $m = a + b + c = 2 + 2,83 + 3,46 = 8,29$ (cm).

b) A felszín kiszámolásához szükségünk van a doboz éleinek hosszára.



Ezt a magasság, az egyik oldalél és az alaplap átlójának fele által meghatározott ATE derékszögű háromszögben Pitagorasz-tétel segítségével számoljuk ki:

$$m^2 = x^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

ebből

$$x = \sqrt{2 \cdot m^2} = \sqrt{2 \cdot 8,29^2} \approx 11,72,$$

$$A_{\text{doboz}} = T_{\text{alap}} + 4 \cdot T_{\text{oldal}} = 11,72^2 + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 11,72^2 \approx 375,27.$$

Vagyis a doboz felszíne kb. $375,27 \text{ cm}^2$.

6. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{2x+1} = \sqrt{3x+13};$

b) $\frac{\log_2(x^3+26)}{\log_4(x+2)} = 6;$

c) $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$

(16 pont)

Megoldás. a) Mivel a négyzetgyökjelek alatti kifejezések nem lehetnek negatívak, azért a kikötés: $x \geq 0$. Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

$$x + 2x + 1 + 2\sqrt{x}\sqrt{2x+1} = 3x + 13.$$

Átrendezve: $\sqrt{x(2x+1)} = 6$. Ismét négyzetre emelünk:

$$x(2x+1) = 36, \quad 2x^2 + x - 36 = 0.$$

A másodfokú egyenlet gyökei $x_1 = 4$ és $x_2 = -\frac{9}{2}$, amelyek közül a második nem tesz eleget a kikötésnek.

Tehát a megoldás az $x = 4$, amit ellenőriztünk is.

b) A kikötés a logaritmusban szereplő kifejezésekre: $x^3 + 26 > 0$ és $x + 2 > 0$. A nevező pedig nem lehet nulla: $x \neq -1$. Összefoglalva: $x > -2$, de $x \neq -1$.

$$\log_2(x^3+26) = 6 \cdot \log_4(x+2),$$

$$\frac{\log_4(x^3+26)}{\log_4 2} = 6 \cdot \log_4(x+2),$$

$$\log_4(x^3+26) = 3 \cdot \log_4(x+2),$$

$$\log_4(x^3+26) = \log_4(x+2)^3,$$

$$x^3 + 26 = (x+2)^3,$$

$$0 = 6x^2 + 12x - 18,$$

$$0 = x^2 + 2x - 3.$$

A két gyök: $x_1 = 1$ és $x_2 = -3$. Az egyenlet kikötései miatt csak az $x = 1$ a megoldás.

c) Alakítsuk az egyenletet:

$$\begin{aligned} 2 \sin^2 x + 4 \sin^2 x \cdot \cos^2 x &= 2, \\ 2 \sin^2 x + 4 \sin^2 x (1 - \sin^2 x) &= 2, \\ 2 \sin^2 x + 4 \sin^2 x - 4 \sin^4 x &= 2, \\ 0 &= 4 \sin^4 x - 6 \sin^2 x + 2, \\ 0 &= 2(\sin^2 x)^2 - 3 \sin^2 x + 1. \end{aligned}$$

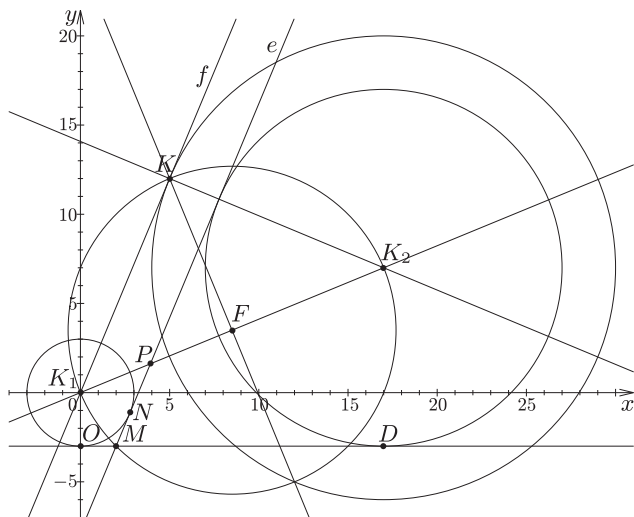
A másodfokú egyenlet gyökei 1 és $\frac{1}{2}$, ebből $\sin x$ -re 4 egyenlet adódik:

$$\begin{aligned} \sin x &= 1, & \text{ekkor } x_1 &= \frac{\pi}{2} + 2l_1\pi, \text{ ahol } l_1 \in \mathbb{Z}; \\ \sin x &= -1, & \text{ekkor } x_2 &= -\frac{\pi}{2} + 2l_2\pi, \text{ ahol } l_2 \in \mathbb{Z}; \\ \sin x &= \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{ekkor } x_3 &= \frac{\pi}{4} + 2m\pi, \text{ ahol } m \in \mathbb{Z}, & x_4 &= \frac{3\pi}{4} + 2n\pi, \text{ ahol } n \in \mathbb{Z}; \\ \sin x &= -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{ekkor } x_5 &= \frac{5\pi}{4} + 2p\pi, \text{ ahol } p \in \mathbb{Z}, & x_6 &= \frac{7\pi}{4} + 2q\pi, \text{ ahol } q \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Az egyenlet megoldása összefoglalva: $x = \frac{k\pi}{4}$, ahol k négyvel nem osztható egész szám.

7. Adott a koordináta-rendszerben a $k_1: x^2 + y^2 = 9$ és a $k_2: (x - 17)^2 + (y - 7)^2 = 100$ kör. Igazoljuk, hogy a két kör vízszintes közös külső és a pozitív meredekségű közös belső érintőjének metszéspontjából derékszögben látszik a két kör középpontja által meghatározott szakasz. (16 pont)

Megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit.



Kiszámoljuk a két érintő M metszéspontját, majd megvizsgáljuk a K_1MK_2 nagyságát. Az adatok alapján a két kör vízszintes közös külső érintőjének egyenlete: $y = -3$. A pozitív meredekségű közös belső e érintő párhuzamos és 3 egység távolságra van a K_2 középpontú, 13 sugarú körhöz a K_1 -ből (az origóból) húzott f érintővel.

A K_1K egyenes normálvektorának meghatározásához szükségünk van a K pont koordinátáira. A K_1K_2K derékszögű háromszög két oldalának ismeretében számoljuk ki a harmadik oldal hosszát. Mivel $K_1K_2 = \sqrt{17^2 + 7^2} = \sqrt{338}$, $KK_2 = 10 + 3 = 13$, azért $K_1K = \sqrt{338 - 13^2} = 13$.

A K pont koordinátáit úgy számoljuk ki, hogy az F pontba mutató helyvektorhoz, azaz $\vec{OF}(8,5;3,5)$ vektorhoz hozzáadjuk az \vec{FK}_1 vektor -90 fokos elforgatottját, vagyis az $\vec{FK}(-3,5;8,5)$ vektort. Így tehát a keresett koordináták: $K(5;12)$. Az $(5;12)$ a belső érintő egyik irányvektorának a koordinátája, így egy normálvektorának $(12;-5)$ a koordinátája. Ez lesz a belső érintő normálvektora is.

A belső érintő egyenletének felírásához számoljuk ki a belső érintő és a középpontokat összekötő egyenes P metszéspontjának koordinátáit, mely a két kör hasonlóságának középpontja, ezért a K_1K_2 szakaszt $3 : 13$ arányban osztja.

Ezek alapján a P pont koordinátái: $(17 \cdot \frac{3}{13}; 7 \cdot \frac{3}{13})$, azaz $P(\frac{51}{13}; \frac{21}{13})$. A belső érintő egyenlete:

$$12x - 5y = 12 \cdot \frac{51}{13} - 5 \cdot \frac{21}{13} = 39.$$

A két érintő M metszéspontját a következő egyenletrendszer megoldása adja:

$$\left. \begin{array}{l} y = -3 \\ 12x - 5y = 39 \end{array} \right\}.$$

Vagyis: $M(2; -3)$.

Végezetül megmutatjuk, hogy $\overrightarrow{K_1M} \cdot \overrightarrow{MK_2} = 0$. Az ismert koordináták alapján: $\overrightarrow{K_1M}(2; -3)$, $\overrightarrow{MK_2}(15; 10)$. Tehát valóban $\overrightarrow{K_1M} \cdot \overrightarrow{MK_2} = 2 \cdot 15 - 3 \cdot 10 = 0$. Ez azt jelenti, hogy a két érintő M metszéspontjából valóban derékszögben látszik a K_1K_2 szakasz.

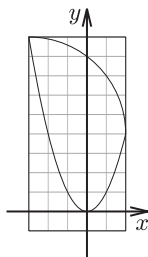
Megjegyzés. A **B. 4468.** feladatból következik, hogy az itt megfogalmazott állítás nem csak erre a konkrét esetre igaz, vagyis: Két kör közös külső és közös belső érintőjének metszéspontjából mindig derékszögben látszik a két kör középpontja által meghatározott szakasz.

8. A szabó egy farsangi pillangójelmezhez az ábrán látható mintát használja, amit a boltban vásárolt téglalap alakú anyagból vág ki. A szabásminta egy parabolaiúból és egy körívből áll.

a) Az anyag hány százaléka lesz hulladék?

b) Adjuk meg a parabola és a kör összes metszéspontját.

(16 pont)



Megoldás. a) Tegyük a szabásmintára egy koordinátarendszert az ábrán látható módon. Ekkor a parabola az $f(x) = x^2$ hozzárendeléssel megadott függvény képe lesz. A parabola alatti területet (az x tengelyig) a következő integrállal határozhatjuk meg:

$$\int_{-3}^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-3}^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{(-3)^3}{3} = \frac{35}{3}.$$

Az x tengely alatti rész területe 5, így az itt keletkezett hulladék:

$$\frac{35}{3} + 5 = \frac{50}{3} \approx 16,667.$$

A jobb felső rész esetén egy ötször ötös négyzetből hiányzik egy öt sugarú negyedkör. Vagyis ennek a hulladéknak a területe:

$$25 - \frac{25\pi}{4} \approx 5,365.$$

Ezek alapján az összes hulladék: 22,032. Az eredeti téglalap területe 50, vagyis az anyagnak kb. a 44,1%-a lesz hulladék.

b) A parabola egyenlete $y = x^2$. A kör sugara 5 egység, középpontjának koordinátája pedig $(-3; 4)$. A kör egyenlete: $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. A metszéspontok meghatározásához a két egyenletből álló egyenletrendszert kell megoldanunk.

A második egyenlet az x^2 behelyettesítése után így írható:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 + x^4 - 8x^2 + 16 &= 25, \\ x^4 - 7x^2 + 6x &= 0, \\ x(x^3 - 7x + 6) &= 0. \end{aligned}$$

Mivel az eredeti szabásmintán adott volt két metszéspont (az $x = -3$ -nál és az $x = 2$ -nél), azért könnyen felírhatjuk a gyöktényezőző alakot: $x(x + 3)(x - 2)(x - 1) = 0$. Visszahelyettesítéssel az első koordinátákhoz meghatározzuk a metszéspontok második koordinátáját is. Négy metszéspontot kaptunk. Helyüket az általunk bevezetett koordináta-rendszer segítségével adjuk meg: $(-3; 9)$, $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(2; 4)$.

9. A 2012-es londoni olimpián csapatunk 8 arany-, 4 ezüst- és 5 bronzérmét szerzett. Nem volt olyan versenyszám, amiben két magyar érem született.

a) Hányféleképpen sorolhatjuk föl azokat a versenyszámokat, amelyekben csapatunk érmét szerzett, úgy, hogy először az aranyérmesek, utána az ezüstérmesek, végül a bronzérmesek versenyszámait nevezzük meg?

b) Hányféleképpen sorolhatjuk fel a fenti 17 versenyszámot, ha az azonos színű érmét hozó számok közül mindig azt soroljuk fel hamarabb, amelyik korábban ért véget?

c) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az érmes versenyszámaink közül véletlenszerűen hármat választva az azokhoz tartozó érmek különböző színűek lesznek?

(16 pont)

Megoldás. a) A 8 aranyérem, a 4 ezüstérem és az 5 bronzérem permutációinak szorzatát kell vennünk: $8! \cdot 4! \cdot 5! = 116\,121\,600$.

b) A feladat szerint három, egyenként 8, 4 és 5 hosszú, meghatározott sorrendű sorozatot kell egymásba fésülni. A 8 aranyérmeshez 9 helyre kerülhetnek az ezüstérmesek, de akár többen is egy helyre. Vagyis ismétléses kombinációval kell számolnunk, és így ez $\binom{12}{4}$ -féleféppen lehetséges. Az így kapott 12 hosszú sorozatban 13 helyre kerülhetnek a bronzérmesek, ez $\binom{17}{5}$ -féle lehetőség.

Összesen tehát $\binom{12}{4} \cdot \binom{17}{5} = 3\,063\,060$ felsorolás létezik.

c) A 17 éremből hármat választunk, ezért az összes eset száma $\binom{17}{3}$.

A 8 aranyéremből egyet, a 4 ezüstéremből egyet és az 5 bronzéremből egyet $8 \cdot 4 \cdot 5$ -féleféppen lehet kiválasztani. Vagyis a keresett valószínűség:

$$P = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 5}{\binom{17}{3}} \approx 0,235.$$

Gedeon Veronika
(Budapest)