Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Egy iskola 520 tanulójával 9 kérdésből álló tesztet töltettek ki. A kérdésekre igennel vagy nemmel lehetett válaszolni. Mindenki válaszolt az összes kérdésre. Az értékelés úgy történt, hogy a k. kérdésre adott jó válasz k pontot, rossz válasz $-k$ pontot ért.

a) Mutassuk meg, hogy biztosan volt két tanuló, aki ugyanúgy töltötte ki a tesztlapot.

b) Legalább hány tanulónak volt ugyanannyi pontja az értékelés után?

(*11 pont*)

2. *a*) Állítsuk elő a 2012-t szomszédos természetes számok összegeként.

b) Egy számtani sorozat első 2013 elemének összege 2012. Az első 2012 elem közül a páros indexűek összege eggyel több, mint a páratlan indexűek összege. Határozzuk meg a sorozat első elemét. (*13 pont*)

3. Adott a valós számokon értelmezett

$$I(x)=\int\limits_{-2}^{x} f(t)\,dt$$

függvény, és tudjuk, hogy $f(t)=3t^2+4t-1$. Határozzuk meg az $I(x)$ zérushelyeit, és azokat az intervallumokat, melyeken konvex, illetve konkáv a függvény.

(*13 pont*)

4. A párizsi Louvre üvegpiramisának (szabályos négyoldalú gúla) alapélét vegyük 34 m-nek, magasságát pedig 22 m-nek.

a) Mekkora felületet kell az ablakmosó csapatnak letisztítania, ha kívülről és belülről is lemossák az üveglapokat?

Éjszaka a piramist oszlopokon álló reflektorokkal szeretnék megvilágítani. Az oszlopokat egy négyzet csúcsaiban állítják fel, melynek oldalfelező pontjai a piramis alapjának csúcsai.

b) Milyen magasan kell a reflektorokat az oszlopon elhelyezni, hogy a belőlük kiinduló fénysugarak az oldallapok súlypontjaiban merőlegesen essenek az üvegfelületekre? (*14 pont*)

II. rész

5. Adott az $f(x)=\log_2(x+4)+1$ hozzárendelésű függvény. Tudjuk, hogy az A_nOC_n háromszögek egyenlőszárú, O-nál derékszögű háromszögek, ahol A_n az $f(x)$ függvény grafikonjának egy pontja, O pedig az origó.

a) Ábrázoljuk az $f(x)$ függvényt. Adjuk meg egy tetszőleges A_n esetén a háromszög C_n csúcsának koordinátáit.

b) Határozzuk meg a C_n pontok halmazát, és ábrázoljuk a koordinátarendszerben. (*16 pont*)

6. Oldjuk meg a következő egyenleteket:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2+x}}-\dfrac{1}{\sqrt{2-x}}=\sqrt{2}$;

b) $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{\cos^2 x}=\sqrt{2}$. (*16 pont*)

7. A p_2 parabola csúcsa a $C''(6;7)$ pont, tengelye párhuzamos a $p_1\colon y=x^2-8x+14$ paraboláéval, és a $P\left(9;\dfrac{19}{4}\right)$ pont illeszkedik a p_2 parabolára.

Az $A_nB_nC_n$ egyenlőszárú háromszögek alapja A_nB_n, ahol $A_n\in p_2$, $B_n\in p_1$, és C_n illeszkedik a koordinátarendszer ordinátatengelyére. Az A_n és a B_n pontok abszcisszája egyenlő, és a B_n pontok ordinátája kisebb, mint az A_n pontoké.

a) Határozzuk meg a C_1 pont koordinátáit, ha az $A_1B_1C_1$ háromszög derékszögű.

b) Az $A_nB_nC_n$ háromszögek közül melyiknek legnagyobb a területe? (*16 pont*)

8. Határozzuk meg az összes olyan $P(x)=ax^2+bx+c$ egész együtthatós polinomot, melyre $\left|P(p_1)\right|=\left|P(p_2)\right|=\left|P(p_3)\right|=5$, ahol p_1, p_2, p_3 különböző prímszámok. (*16 pont*)

9. A nemzetközi sporteseményeken a versenyzőket nem csak a dicsőség hajtja, hanem részben a reklámszerződésekkel járó magas pénzösszegek is. Így nem meglepő, ha a sportolók és az edzők időnként a győzelem megszerzése érdekében nem megengedett eszközöket is alkalmaznak.

A lehetőségek szerinti legtisztességesebb feltételek biztosítása érdekében közvetlenül a fontos versenyek előtt, de a felkészülések során is meghatározott szabályok szerint dopping ellenőrzéseket tartanak. A sportolók vizeletmintát adnak, melyeket lepecsételve és megjelölve, két részben, egy úgynevezett A-próbaként, illetve B-próbaként őriznek meg és vizsgálnak.

Miközben a nemzetközi Sportszövetség egyértelmű, minden kétséget kizáró doppingteszt kialakításán fáradozik, addig bizonyos laborok olyan doppingszerek kifejlesztésén dolgoznak, melyek a kontroll során a vizeletből nem mutathatók ki. Az a) feladatrészben abból induljunk ki, hogy egy sportrendezvényen 2400 doppingvizsgálatnak alávetett résztvevőből 60-an egy bizonyos anyaggal doppingoltak. Az összes 2400 A-próbát ellenőrizték.

A tesztre a következő érvényes:

Amennyiben egy sportoló ezzel a szerrel doppingolt, akkor ezt a teszt 85% biztonsággal kimutatja. Ebben az esetben pozitív eredményről beszélünk.

Amennyiben egy sportoló nem használta az említett anyagot, úgy ezt a teszt 96% biztonsággal bizonyítja.

a) Számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személyre az A-próba után hibás ítélet született.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy az A-próba után indokolatlanul vádoltak meg egy sportolót?

c) Mutassuk meg, hogy kisebb, mint 0,08 az esélye annak, hogy a B-próba után is indokolatlanul vádoltak valakit. (*16 pont*)

Simon János
(Budapest)