A 2011–2012. évi Országos Középiskolai Matematikai Tanulmányi Verseny feladatai

I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Oldja meg a valós számok halmazán az $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 82$ egyenletet!

2. Egy számsorozatot a következő módon képezünk: legyen $a_1 = 1$ és $a_2 = 2$, a sorozat további tagjai pedig tegyenek eleget az $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n+1} - 1$ $(n \geq 2)$ összefüggésnek. Mennyi a sorozat első 2011 tagjának az összege?

3. Legyenek m és n pozitív egész számok. Igazolja, hogy

$$\frac{m}{n} < \frac{m^2 + m \cdot n + 2n^2}{m^2 + m \cdot n + n^2}$$

akkor és csak akkor igaz, ha $\frac{m}{n} < \sqrt[3]{2}$!

4. Egy R sugarú körbe olyan trapézt írunk, amelynek oldalai R; R; R; $2R$ hosszúságú húrok. Az R hosszúságú alaphoz tartozó rövidebb ív F felezőpontjából párhuzamosokat húzunk a trapéz száraival, ezek a kört másodszor a G, illetve a H pontokban metszik. Bizonyítsa be, hogy a trapéz területe egyenlő az FGH háromszög területével!

5. Legyenek az a, b, c, d számok egymástól és 0-tól különböző számjegyek. Adja meg a lehető legkevesebb számú osztóval rendelkező, tízes számrendszerbeli,

$$N = \overline{abcd} + \overline{dabc} + \overline{cdab} + \overline{bcda}$$

alakú számok közül a legnagyobbat!

6. Tegyünk egy hagyományos óra minden számjegyére egy-egy korongot, tehát az 1-re egy darabot, a 2-re is egy darabot, és így tovább, végül a 12-re is egy darabot. Ezután egy lépés a következőt jelenti: megfogunk két tetszőleges korongot, és az egyiket az óramutató járásával ellentétes irányban, a másikat pedig az óramutató járásával azonos irányban a szomszédjára áttesszük. Elérhetjük-e véges sok ilyen lépéssel, hogy mind a 12 korong ugyanazon a számjegyen legyen?

Második forduló

1. Az x valós számra teljesül a $2 \cdot \sin 2x = 2 \cdot \sin^3 x + \cos 2x \cdot \sin |x|$ egyenlőség. Milyen értékeket vehet föl $\cos x$?

2. A $3p \cdot x + 12q \cdot y + 121 = 0$ egyenletű egyenes érinti a $4y^2 = x$ egyenletű parabolát, ahol p és q pozitív prímszámok. Határozza meg az egyenes és a parabola érintési pontjának koordinátáit!

3. Adott az e egyenes, és adottak az e egyenesen az A; B; C pontok ebben a sorrendben. Legyen a B ponton áthaladó, a BA és BC félegyenesektől különböző félegyenes tetszőleges pontja P. Az ABP és BCP háromszögek köré írható körök középpontját jelölje rendre E és D. Határozza meg a DE távolságot, ha adott az $AC = d$ szakasz és a derékszögnél kisebb $PBC\sphericalangle = \alpha$ szög!

4. Oldja meg a valós számok halmazán a $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^x + \left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^x = 34$ egyenletet!

5. Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög. Az ABC háromszög magasságpontja legyen M_1, az ABD háromszögé pedig M_2. Bizonyítsa be, hogy $M_1M_2 \parallel CD$!

Harmadik (döntő) forduló

1. Határozza meg az összes olyan x egész számot, amely eleget tesz a

$$\log_{\frac{x^2-3x+2}{x+7}}(x+4) < 1$$

egyenlőtlenségnek!

2. Egy R sugarú gömbbe beírtunk egy olyan négyzetes gúlát, amelynek minden éle egyenlő. A gúlába pedig egy, a lapjait érintő kisebb gömböt írtunk. Mennyi a két gömbfelszín arányának pontos értéke?

3. Legyenek a és b olyan racionális számok, melyekre teljesül, hogy $a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$. Bizonyítsa be, hogy ekkor a $\sqrt{1-ab}$ kifejezés is racionális szám!

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(2x^2 - x - 3\right)^4 + \left(2x^2 - x - 3\right)^2\left(2x^2 + x - 6\right)^2 + \left(2x^2 + x - 6\right)^4 = 0.$$

2. Az ABC háromszög belső D pontján áthaladó AD, BD és CD egyenesek a szemközti oldalakat rendre az E, F, G pontokban metszik. A következő területek mérőszámait ismerjük: $T_{ADG} = 40$, $T_{BDG} = 30$, $T_{BDE} = 35$, $T_{CDF} = 84$.

Mekkora az ABC háromszög területe?

3. Egy szabályos dobókockát egymás után háromszor feldobunk. Mennyi a valószínűsége, hogy a három dobott szám szorzata 10-zel osztható?

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \frac{7}{\sqrt{x+1}}.$$

5. Adott a síkon három pont A, B és C, melyek nincsenek egy egyenesen. Felveszünk a pontok síkjában egy e egyenest. Ha a P pont az e egyenesen van, vizsgáljuk az $L = PA^2 - PB^2 + \lambda PC^2$ kifejezés értékét, ahol $\lambda \neq 0$. Úgy szeretnénk λ értékét megválasztani, hogy L éppen akkor legyen minimális, amikor P az ABC háromszög súlypontjának az e egyenesre eső merőleges vetülete.

Az e egyenes tetszőleges helyzetében megválasztható-e a kívánt módon λ értéke?

Második forduló

1. A pozitív egész n szám osztóit nagyság szerint növekedve felírtuk, az első volt az 1. A sorrendben a hatodik lett a 35. Keressük meg azt a legkisebb n értéket, amire ezek teljesülnek.

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert:

$$\cos^2(x-y) - \sin^2(x+y) = 1,$$
$$xy = 2\pi^2.$$

3. Az ABC háromszögben $BAC\sphericalangle = 94^\circ$, $ACB\sphericalangle = 39^\circ$. Igazoljuk, hogy a háromszög oldalaira fennáll: $BC^2 = AC^2 + AC \cdot AB$.

4. Oldjuk meg a valós számok körében: $x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} = xy$.

Harmadik (döntő) forduló

1. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz AB és CD oldalai párhuzamosak, $AB < CD$. Az AD és BC egyenesek metszéspontja legyen P. A trapéz köré írt kör A és C pontjához húzott érintőinek metszéspontja legyen Q. Igazoljuk, hogy a PQ egyenes párhuzamos az AB egyenessel.

2. Legyen $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,2,3\}$. Az $f(x)$ függvény értelmezési tartománya A és minden A-beli x esetén $f(x) \in A$. Hány olyan $f(x)$ függvény van, amelyre

$$\{f(f(x)) \mid x \in A\} = B?$$

3. Legyen $h(1) = 1$ és $n = 2, 3, \ldots$ esetén $h(n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$. Mutassuk meg, hogy

$$L = \frac{1}{h^2(1)} + \frac{1}{2 \cdot h^2(2)} + \frac{1}{3 \cdot h^2(3)} + \ldots + \frac{1}{2012 \cdot h^2(2012)} < 2.$$

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Adott három, nem egy egyenesbe eső pont, A, B és C. Hol helyezkednek el a térben azok a P pontok, amelyekre $AB^2 + PC^2 = BC^2 + PA^2 = CA^2 + PB^2$?

2. Lássuk be, hogy ha p prímszám, akkor np osztója $\binom{np}{p} - n$-nek.

3. Mely k és n pozitív egészekre teljesül: $\left|2^k - 3^n\right| = 17$?

4. Az iskolában a kisdiák Sziszüphosz szorgalmát piros, kék és zöld pontokkal jutalmazzák. Három összegyűjtött piros pont beváltható egy kék pontra, három kék pont egy zöld pontra cserélhető be, és végül három zöld pontért ismét egy piros pont jár. Sziszüphosznak az év végén mindhárom színből 2011-2011 pontja van. Ezeket addig cserélgeti, amíg mindegyikből legfeljebb két pontja marad. Hány piros, kék és zöld pontja lehet Sziszüphosznak a cserék elvégzése után?

5. Adott egy 2011 csúcsú konvex sokszög úgy, hogy semelyik négy csúcs sem esik egy körre. A csúcsokból kiválasztható ponthármasokra megrajzoljuk a rájuk illeszkedő kört. Egy ilyen kör sovány, ha a sokszögnek van olyan csúcsa, amely kívül van a körön, ellenkező esetben a kör kövér. Sovány vagy kövér körből van több?

Második (döntő) forduló

1. Legyen $n \geq 3$. Az n tagot számláló Hazugok Klubjában mindenkit megkérdezünk, hány olyan tagja van a klubnak (saját magán kívül), aki vele azonos évben született. A klubtagok mind hamis adatokat akarnak közölni úgy, hogy valamilyen sorrendben a $0, 1, \ldots, n-1$ válaszokat adják meg. A tényleges születési évszámokról mi csak annyit tudunk, hogy nem mind különbözők, de nem is mind azonosak. Milyen n értékekre lehetünk biztosak abban, hogy a klubtagok el tudják érni a céljukat?

2. Legyen B az AC szakasz belső pontja. Rajzoljuk meg a k_1 és a k_2 félkört az AB, illetve az AC szakaszra mint átmérőre ugyanabban a félsíkban. A BC szakaszra mint alapra állítsunk olyan BCD egyenlő szárú háromszöget, amelynek a D csúcsa k_2-re illeszkedik. Legyen K annak a körnek a középpontja, amely érinti k_1-et, k_2-t és a BD szakaszt. Igazoljuk, hogy KB merőleges AC-re.

3. Legyen $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ a pozitív prímszámok sorozata és

$$f(k,n) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor n\sqrt{p_k/p_j} \right\rfloor.$$

Bizonyítsuk be, hogy bármely $M > 0$ egészhez pontosan egy olyan (k, n) pozitív egész számpár létezik, amelyre $f(k,n) = M$.

(A képletben $\lfloor x \rfloor$ az x szám alsó egészrészét, $\sum$ pedig a megadott indexekre történő összegzést jelenti, tehát pl. $f(2,1) = \lfloor 1 \cdot \sqrt{3/2} \rfloor + \lfloor 1 \cdot \sqrt{3/3} \rfloor = 2$ (az összeg többi tagja 0).)