Beszámoló az 53. Nemzetközi Matematikai Diákolimpiáról

Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát július 4–16. között Argentínában, Mar del Platában rendezték meg.

A versenyen 100 ország 548 diákja vett részt. A legtöbb ország a megengedett maximális létszámú, 6 fős csapattal szerepelt; az alábbi listában az országnév után zárójelben tüntettem fel az adott ország versenyzőinek számát, ha ez hatnál kevesebb volt.

A résztvevő országok: *Amerikai Egyesült Államok, Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán, Banglades (5), Belgium, Belorusszia, Bolívia, Bosznia-Hercegovina, Brazília, Bulgária, Chile, Ciprus, Costa Rica, Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Dél-Korea, Ecuador, El Salvador (3), Elefántcsontpart (4), Észak-Korea, Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-Szigetek (3), Görögország, Grúzia, Guatemala (2), Hollandia, Honduras (3), Hong Kong, Horvátország, India, Indonézia, Irán, Írország, Izland, Izrael, Japán, Kanada, Kazahsztán, Kína, Kirgizisztán (5), Kolumbia, Koszovo, Kuba (1), Kuwait (3), Lengyelország, Lettország, Liechtenstein (2), Litvánia, Luxemburg (4), Macedónia, Magyarország, Makaó, Malajzia, Marokkó (5), Mexikó, Moldova, Mongólia, Montenegro (2), Nagy-Britannia, Németország, Nigéria, Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország, Pakisztán (5), Panama (3), Paraguay, Peru, Portugália, Puerto Rico (4), Románia, Spanyolország, Sri Lanka (4), Svájc, Svédország, Szaúd-Arábia, Szerbia, Szingapúr, Szíria, Szlovákia, Szlovénia, Tadzsikisztán, Tajvan, Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago (5), Tunézia (2), Türkmenisztán, Uganda (5), Új-Zéland, Ukrajna, Uruguay, Venezuela (3), Vietnam.*

A versenyen szokás szerint mindkét napon négy és fél óra alatt 3–3 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat alább közöljük.) Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 28–42 pontot elért, ezüstérmet a 21–27 pontos, míg bronzérmet a 14–20 ponttal rendelkező tanulók szereztek. Dicséretben részesültek azok a versenyzők, akiknek 14-nél kevesebb pontjuk volt, de egy feladatot hibátlanul megoldottak.

A magyar csapatból

Janzer Olivér (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) 27 ponttal és
Ágoston Tamás (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) 22 ponttal *ezüstérmet*,
Nagy Róbert (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) 14 ponttal *bronzérmet* szerzett.
Ódor Gergely (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) és
Strenner Péter (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn., 12. o.t.) egyaránt 11 ponttal, valamint
Sándor András (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. o. t.) 8 ponttal *dicséretben* részesült.

A magyar csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék), helyettes vezetője *Dobos Sándor* (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn.) volt. *Kós Géza* (MTA SZTAKI, ELTE TTK) a problémakiválasztást előkészítő bizottság meghívott tagjaként vett részt az olimpián.

Az országok (nem-hivatalos) pontversenyében Magyarország a 38. helyen végzett (holtversenyben Franciaországgal, Olaszországgal és Belgiummal). A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. Dél-Korea 209, 2. Kína 195, 3. USA 194, 4. Oroszország 177, 5–6. Kanada és Thaiföld 159, 7. Szingapúr 154, 8. Irán 151, 9. Vietnam 148, 10. Románia 144, 11. India 136, 12–13. Észak-Korea és Törökország 128, 14. Tajvan 127, 15. Szerbia 126, 16. Peru 125, 17. Japán 121, 18. Lengyelország 119, 19–21. Brazília, Bulgária és Ukrajna 116, 22–23. Hollandia és Nagy-Britannia 115, 24. Belorusszia 114, 25. Horvátország 110, 26. Görögország 107, 27–28. Ausztrália és Hong Kong 106, 29. Szaúd-Arábia 105, 30. Moldova 104, 31–33. Izrael, Mexikó és Németország 102, 34. Kazahsztán 101, 35–36. Indonézia és Malajzia 100, 37. Portugália 96, **38–41**. Belgium, Franciaország, **Magyarország** és Olaszország **93**, 42. Tadzsikisztán 91, 43. Mongólia 90, 44. Szlovákia 85, 45. Bosznia-Hercegovina 84, 46. Kolumbia 83, 47–49. Costa Rica, Csehország és Örményország 80, 50. Ausztria 79 ponttal.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. Az alábbi felsorolásban minden tanár neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik a tanítványaik:

Buday Endre (SP), *Dobos Sándor* (ÁT, JO, NR, ÓG, SA, SP), *Hegedűs Pál* (ÁT, ÓG, SA), *Kiss Géza* (JO, NR), *Ponáczné Csuthy Márta* (SP), *Pósa Lajos* (ÁT, JO, NR, ÓG, SA), *Surányi László* (ÁT, JO, NR, ÓG, SA), *Táborné Vincze Márta* (ÁT, JO, NR, ÓG, SA).

Ugyancsak szeretnék külön köszönetet mondani Dobos Sándornak, mint a központi olimpiai előkészítő szakkör vezetőjének.

Az idei eredmény messze elmaradt a korábbi években megszokottól. Erre már az évközi versenyek és a válogatóversenyek gyengébb eredményei alapján számítani lehetett. Az olimpián mutatott tényleges teljesítmény azonban még a mérsékelt várakozásokat is alulmúlta.

Az első, könnyű geometria-feladat kapcsán dicséret illeti a csapatot, hiszen ezt a feladatot mindenki hibátlanul megoldotta, így a maximálisan megszerezhető 42 pontot értük el ezen a feladaton. Sajnos, a második feladatot, ami egy viszonylag könnyen bizonyítható egyenlőtlenség volt, csak ketten oldották meg. Utólag persze mindenki verte a fejét, hogy hogy lehet, hogy nem jött rá az egyszerű megoldásra, de hát a pontszámon ez már nem változtatott. A másik könnyűnek szánt (de nem annyira könnyű) feladat, a negyedik, egy függvényegyenlet volt. Az ilyen feladatok megoldását a felkészülés folyamán gyakoroltuk, és hárman meg is oldották a feladatot. Hárman azonban a megoldás kezdeti lépéseiben valami triviális elírást vétettek (előjelet vagy kitevőt rosszul írtak), és innentől kezdve esélyük sem volt a helyes megoldás megtalálására. Az ötödik feladat egy nagyon szép, közepesnél valamivel nehezebb geometria-feladat volt. Mivel a magyar diákok mind rendelkeztek a megoldáshoz szükséges előismeretekkel, jogosan bíztunk abban, hogy legalább néhányan megoldják a feladatot. Csalódás volt, hogy ez senkinek sem sikerült. (Erre a feladatra kaptuk a legkevesebb pontot.)

A nehéznek szánt harmadik és hatodik feladat – mint az az elmúlt években többször is előfordult – talán túlságosan is nehéz volt. Azonban mindkét feladatnak volt egy könnyebb és egy nehezebb része, és a könnyebb részek megoldására mindenkinek reális esélye volt. Így ismét csalódást okozott, hogy a harmadik feladat könnyű részét csak egy, a hatodik feladat könnyű részét pedig csak két versenyzőnk oldotta meg. Azért, hogy a nehéz részek megoldása nem sikerült, senkinek sem teszek szemrehányást: ezek – különösen a harmadik feladaté – tényleg nagyon nehezek voltak. Illusztrációképpen: az 548 versenyző közül a harmadik feladatot csak 8-nak, a hatodik feladatot csak 10-nek sikerült hibátlanul megoldania.

Egy dologért azonban dicséret illeti a csapatot: a korábbi évekkel ellentétben idén mindenki világosan és érthetően írta le a megoldásait.

Nagyon bízom benne, hogy sok középiskolás diák képes és kész elvégezni a most induló tanévben azt a munkát, ami ahhoz kell, hogy legközelebb ismét lényegesen jobban szerepelhessünk.

Ezúton szeretnék köszönetet mondani a MOL-nak az olimpiai felkészítéshez nyújtott támogatásáért. Ugyancsak köszönet illeti a helyi, Mar del Plata-i magyarokat, akik az olimpia alatt két kirándulást is szerveztek a csapatnak és egy vacsorán is vendégül láttak minket.

A következő diákolimpiát Kolumbiában, a Karib-tenger partján fekvő Santa Martában rendezik, 2013. július 18–28. között.

Pelikán József

Az 53. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai*

Első nap

1. feladat. Az ABC háromszög A csúccsal szemközti hozzáírt körének középpontja J. Ez a hozzáírt kör a BC oldalt az M pontban, az AB, ill. AC egyeneseket pedig a K, ill. L pontban érinti. Az LM és BJ egyenesek metszéspontja F, a KM és CJ egyenesek metszéspontja pedig G. Legyen S az AF és BC egyenesek metszéspontja, T pedig a AG és BC egyenesek metszéspontja.

Bizonyítsuk be, hogy M az ST szakasz felezőpontja.

(Az ABC háromszög A csúccsal szemközti *hozzáírt köre* az a kör, amelyik érinti a BC szakaszt, továbbá az AB félegyenes B-n túli részét és az AC félegyenes C-n túli részét.)

2. feladat. Legyen $n \geq 3$ egész, és legyenek $a_2, a_3, \ldots, a_n$ olyan pozitív valós számok, amelyekre $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Bizonyítsuk be, hogy
$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \ldots (1+a_n)^n > n^n.$$

3. feladat. A *hazudós játékot* két játékos játssza: A és B. A játék szabályaiban szerepel két pozitív egész szám: k és n, ezek értékét mindkét játékos ismeri.

A játék megkezdésekor A választ két egész számot: x-et és N-et, amikre $1 \leq x \leq N$. A az x számot titokban tartja, viszont N-et őszintén megmondja B-nek. B ezután megpróbál x-re vonatkozó információt szerezni A-tól a következő típusú kérdésekkel: B minden kérdésében megadja pozitív egész számok egy tetszőleges S halmazát (olyan S halmazt is megadhat, amit már korábban is megadott), és azt kérdezi A-tól, hogy x eleme-e ennek az S halmaznak. B akárhány ilyen típusú kérdést feltehet. A-nak B minden kérdésére a kérdés elhangzása után azonnal *igennel* vagy *nemmel* kell válaszolnia, de mindegyik válasza lehet hazugság is; az egyetlen kikötés az, hogy bármely egymás utáni $k+1$ válasz közül legalább egynek őszintének kell lennie.

Miután B annyiszor kérdezett, ahányszor csak akart, meg kell neveznie egy legfeljebb n pozitív egész számból álló X halmazt. Ha x eleme az X halmaznak, akkor B nyer; különben B veszít. Bizonyítsuk be:

1. Ha $n \geq 2^k$, akkor B-nek van nyerő stratégiája.
2. Minden elég nagy k-hoz van olyan $n \geq 1{,}99^k$ egész szám, amire B-nek nincs nyerő stratégiája.

Második nap

4. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ függvényt, amire tetszőleges a, b, c egészekre, amelyekre $a+b+c=0$ teljesül, fennáll az
$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$$
egyenlőség. ($\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát jelöli.)

5. feladat. Legyen az ABC háromszögben $BCA\sphericalangle = 90°$, és legyen D a C-ből induló magasságvonal talppontja. Legyen X a CD szakasz belső pontja. Legyen K az AX szakasznak az a pontja, amire $BK = BC$. Hasonlóan, legyen L a BX szakasznak az a pontja, amire $AL = AC$. Legyen M az AL és BK egyenesek metszéspontja.

*Az olimpia honlapja: `http://www.oma.org.ar/imo2012/`.

Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.

6. feladat. Határozzuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyhez találhatók olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nemnegatív egészek, amelyekre teljesül

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} = \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} = 1.$$