

# Emelt szintű gyakorló feladatsor

## I. rész

1. Adott a valós számok halmazán értelmezett  $f$  és  $g$  függvény:

$$f(x) = (2x - 1)^2 + (x - 4)(x + 4) - 5x(x - 1),$$
$$g(x) = x^3 - 4|x|.$$

- a) Igazoljuk, hogy  $f$  elsőfokú függvény.  
b) Adjuk meg a  $g$  függvény zérushelyeit.

(11 pont)

2. Egy szabályos hatszög oldalai és átlói közül ötöt pirosra, a többit zöldre festettük. Ezek után véletlenszerűen választunk közülük öt szakaszt. Mennyi annak a valószínűsége, hogy pontosan három piros és kettő zöld lesz a kiválasztottak között?

(13 pont)

3. Az  $ABC$  egy szabályos háromszög. Az  $A$  középpontú  $AB$  sugarú kör kisebbik  $BC$  ívének  $B$ -hez közelebbi harmadolópontja  $D$ ,  $C$ -hez közelebbi harmadolópontja pedig  $E$ . A  $B$  középpontú  $AB$  sugarú kör kisebbik  $AC$  ívének felezőpontja  $F$ . Mekkora az  $AD$ ,  $AE$  és  $BF$  egyenesek által meghatározott háromszög belső szögei?

(13 pont)

4. Az  $ABC$  háromszög csúcsainak koordinátái:  $A(1; 1)$ ,  $B(6; 2)$  és  $C(2; 6)$ .

- a) Milyen hosszú a háromszög legrövidebb magassága?  
b) Mekkora a háromszög területe?

c) Egyszerre dobunk egy piros és egy zöld dobókockával. A pirossal dobott szám legyen egy pont első, a zölddel dobott szám a második koordinátája. Mekkora valószínűséggel lesz az így kapott pont az  $ABC$  háromszög belsejében?

(14 pont)

## II. rész

5. Egy érettségi találkozón Lászlótól 2012-ben megkérdezték tanítványai, hogy hány éves. Ezt válaszolta:

„Édesanyám születési évszáma  $\overline{abcd}$ , az én születési évszámom pedig  $\overline{ab}^2 + \overline{cd}^2$ , ekkor ő 21 éves volt. Nem egy városban élünk, a következő héten utazom hozzá.”

Hány éves László 2012-ben?

(16 pont)

6. Tekintsük az  $\{a_n\} = \left\{ \frac{2n+12}{n+3} \right\}$  sorozatot ( $n \in \mathbb{N}^+$ ).

a) Határozzuk meg a sorozat összes olyan tagját, amelyek 3-nál nem kisebbek.

b) Az  $a_1, a_3, a_9$  sorszámú egy mértani sorozat három egymást követő tagját adják. Igazoljuk, hogy a sorozat ezen három eleme egy számtani sorozatnak a három egymást követő tagja lesz.

c) Hány olyan tagja van a sorozatnak, amelyek három tizedes jegyre kerekített értéke 2,012?

d) Határozzuk meg a  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  értékét.

(16 pont)

7. Az  $ABCDEFGH$  téglatestben úgy jelöltük a csúcsokat, hogy az  $ABCD$  alaplappal egybevágó lapon az  $E$  csúcsot az  $A$ -val, a  $F$  csúcsot a  $B$ -vel, a  $G$  csúcsot a  $C$ -vel, a  $H$  csúcsot a  $D$ -vel kösse össze él. Tudjuk, hogy a  $BAF$  szög  $45^\circ$ -os, a  $CAG$  szög pedig  $30^\circ$ -os.

a) Igazoljuk, hogy  $AFGD$  négyzet.

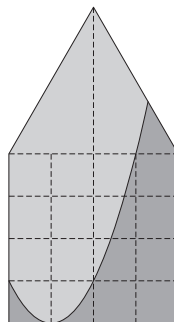
b) Mekkora az  $AFBC$  tetraéder felszíne, ha  $AB = a$ ?

c) Mekkora az  $AFHC$  tetraéder térfogata, ha  $AF$  és  $HC$  távolsága  $a\sqrt{2}$ ?

(16 pont)

8. Egy ház tőzfala egy négyzetből és egy szabályos háromszögből áll. A falat két színnel szeretnék vakolni. A két rész között a határvonal egy parabola lesz, amit a mellékelt *ábra* mutat. A házikó parabola feletti részét világosabbra, a többi sötétebbre vakolják. A felület hány százaléka lesz sötétebb árnyalatú?

(16 pont)



9. Határozzuk meg azokat az  $x$  valós számokat, amelyre  $\cos x$  és  $\cos 2x$  négyzetösszege a  $\cos 3x$  négyzetével egyenlő.  
(16 pont)

**Számadó László**