Megoldásvázlatok a 2012/4. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Egy számtani sorozat differenciája* 56, *n-edik eleme* 2012. *A sorozat első* n *elemének összege* 32 000. *Határozzuk meg a sorozat első elemét.* (*12 pont*)

Megoldás. A számtani sorozat n-edik eleme: $2012 = a_1 + (n-1)\cdot 56$, ebből pedig $a_1 = 2068 - 56n$. A számtani sorozat első n elemének összege:

$$32\,000 = \frac{\left[2a_1 + (n-1)\cdot 56\right]\cdot n}{2} = \frac{\left[2\cdot(2068-56n) + (n-1)\cdot 56\right]\cdot n}{2} =$$
$$= \frac{(4080-56n)\cdot n}{2} = (2040-28n)\cdot n,$$

ezt pedig nullára rendezve és 4-gyel osztva:

$$7n^2 - 510n + 8000 = 0.$$

A másodfokú egyenlet egyik gyöke nem egész, tehát nem megoldása a feladatnak, a másik gyöke: $n = 50$. A sorozat első eleme tehát

$$a_1 = 2068 - 56n = 2068 - 56\cdot 50 = -732.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ez valóban megoldása a feladatnak.

2. *Egy közpark olyan egyenlő szárú háromszög alakú, melynek szárai* 40 *méteresek, a szárak által bezárt szög pedig* 50°*-os. A szárak találkozásától egy* 35 *méter sugarú körívet húznak. A köríven belüli részt füvesítik, a köríven kívüli részt pedig virágokkal ültetik be.*

a) Határozzuk meg a beültetéshez szükséges virágtövek számát, ha egy négyzetméterre 30 *tő virágot számolnak.*

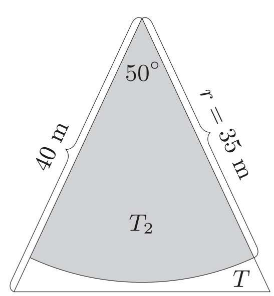
b) A park kerületén körben és a körívnek a park belsejébe eső részére ösvényeket terveznek. Határozzuk meg az építendő ösvények teljes hosszúságát (a számítások során az ösvények szélességét elhanyagolhatjuk). (*13 pont*)

Megoldás. *a*) A körív teljes egészében a park belsejében húzódik, hiszen az egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága

$$40\cdot\cos 25° \approx 36{,}25 \text{ m} > 35 \text{ m}.$$

A beültetendő terület az egyenlő szárú háromszög területének (T_1) és a körív által létrehozott körcikk területének (T_2) különbsége.

$$T_1 = \frac{40\cdot 40\cdot \sin 50°}{2} \approx 612{,}84 \text{ m}^2,$$
$$T_2 = \frac{50°}{360°}\cdot 35^2\cdot\pi \approx 534{,}51 \text{ m}^2,$$
$$T = T_1 - T_2 \approx 78{,}33 \text{ m}^2.$$



A beültetéshez szükséges virágtövek száma a négyzetméterben mért alapterület 30-szorosa, tehát kb. 2350.

b) Az egyenlő szárú háromszög alapjának hossza $2\cdot 40\cdot\sin 25° \approx 33{,}81$ m. A körív hossza

$$\frac{50°}{360°}\cdot 2\cdot 35\cdot\pi \approx 30{,}54 \text{ m}.$$

A megépítendő ösvények teljes hosszúsága tehát kb. $40 + 40 + 33{,}81 + 30{,}54 \approx 144$ m.

3. *Hány olyan nem izomorf, egyszerű gráf van, melynek pontjainak fokszámsorozata*
a) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;
b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5;
c) 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6;
d) 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6;
e) 2; 3; 3; 4; 4; 4?
Amelyik esetben nem létezik ilyen gráf, indokoljuk is meg, hogy miért nem. (*14 pont*)

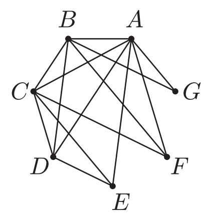
Megoldás. *a*) Nincs ilyen gráf, mert bármely egyszerű gráfban kell lennie két azonos fokszámú pontnak.

b) Nincs ilyen gráf, mert bármely gráf pontjainak fokszámösszege páros.

c) A 6 fokszámú csúcsot jelölje A, az 5 fokszámúakat B és C, a 4 fokszámút D, a 3 fokszámúakat E és F, végül a 2 fokszámút G.

Az A csúcs biztosan össze van kötve az összes többivel. Ha B és C egymással nem lenne összekötve, akkor mindkettő össze lenne kötve G-vel, amelyből így már három él indulna ki, ez tehát nem lehetséges, a két 5 fokszámú csúcs össze van kötve egymással.

Ha B és C valamelyike, például B nincs összekötve D-vel, akkor viszont össze van kötve a maradék három csúccsal: E-vel, F-fel és G-vel. Ekkor D-ből indulnia kell élnek C-be, E-be és F-be is, viszont C-ből két él még hiányozna, tehát ez sem lehetséges, azaz B és C is össze van kötve D-vel.

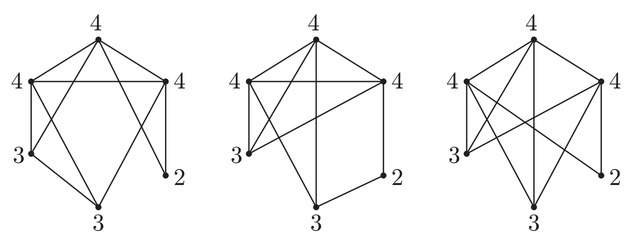


Ezután B-ből, C-ből és D-ből még összesen 5 élnek kell indulnia E-be, F-be és G-be, ami kétféleképpen valósítható meg aszerint, hogy a D-ből hiányzó egyetlen él másik végpontja egy 3 fokszámú vagy a 2 fokszámú csúcs.

Tehát két, a feltételeknek megfelelő nem izomorf, egyszerű gráf van.

d) Nincs ilyen gráf. A három 6 fokszámú csúcs össze van kötve az összes többivel, de így a 3 fokszámúakból már nem is indulhat több él. Az 5 fokszámúból pedig két élnek még kellene indulnia, egyszerű gráfokban azonban nincs hurokél.

e) Ha a 4 fokszámú csúcsok közt mind a három lehetséges él be van húzva, akkor belőlük összesen még 6 élnek kell a másik három csúcs felé indulni, melyek fokszámösszege 8. Ez azt jelenti, hogy a másik három csúcs között összesen egy él van behúzva. Így két különböző gráfot kapunk aszerint, hogy ez az él a két 3 fokszámú csúcs közt húzódik vagy sem.



Ha a 4 fokszámú csúcsok közt két lehetséges él be van húzva, egy pedig nincs, akkor belőlük összesen még 8 élnek kell a másik három csúcs felé indulni, melyek fokszámösszege éppen 8, köztük tehát további élek ebben az esetben nincsenek. A gráf már egyértelműen meghatározott, hiszen az a két 4 fokszámú csúcs, melyek közt hiányzik az él, mindhárom további ponttal össze lesz kötve, a harmadik 4 fokszámú pedig csak a két 3 fokszámúval.

Tehát összesen három, a feltételeknek megfelelő nem izomorf, egyszerű gráf van.

4. *Téglalap alakú földdarabot szeretnénk felmérni. Ehhez a téglalap egyik oldalának belsejében felvesszük az egymástól* 50 *méterre található A és B pontokat. A téglalapnak e két pontot tartalmazó oldalával szemközti csúcsait jelölje C és D. Megmérjük a következő szögeket: CAB szög* 113°*-os, DAB szög* 48°*-os, CBA szög* 54°*-os. Mekkora a földdarab területe?* (*12 pont*)

Megoldás. A téglalap AB szakaszt tartalmazó oldalának két végpontját jelölje E és F az *ábra* szerint. Az ABC háromszögben szinusztétellel meghatározható az AC oldal hossza:

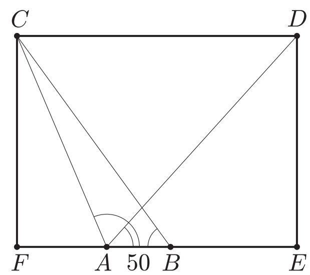
$$AC = AB \cdot \frac{\sin 54^\circ}{\sin(180^\circ - 54^\circ - 113^\circ)} = 50 \cdot \frac{\sin 54^\circ}{\sin 13^\circ} \approx 179{,}8 \text{ m.}$$

Ezt felhasználva az ACF háromszögben:

$$CF = AC \cdot \sin 67^\circ \approx 165{,}5 \text{ m},$$
$$FA = AC \cdot \cos 67^\circ \approx 70{,}3 \text{ m}.$$

Az AED háromszögben:

$$AE = \frac{DE}{\operatorname{tg} 48^\circ} = \frac{CF}{\operatorname{tg} 48^\circ} \approx 149{,}0 \text{ m}.$$



Így a földdarab területe:

$$T = CF \cdot FE = CF \cdot (FA + AE) = 165{,}5 \cdot 219{,}3 \approx 36\,294 \text{ m}^2.$$

II. rész

5. *Dani teniszezik. Egy versenyen első adogatásainak 63%-át ütötte érvényes területre. Ha érvényes területre ment az első adogatás, akkor a labdamenetek 90%-át megnyerte. Ha nem ment érvényes területre, akkor egy másodikat adogathatott. Ezeknek 85%-át ütötte érvényes területre. Amikor a második adogatás érvényes területre ment, akkor a labdamenetek 60%-át nyerte meg. Ha egyik adogatását sem ütötte érvényes területre, akkor Dani elveszítette a labdamenetet.*

a) Mekkora a valószínűsége, hogy Dani elveszített egy labdamenetet, amikor ő adogathatott?

b) Mekkora a valószínűsége, hogy Dani első adogatása már érvényes területre ment, ha tudjuk, hogy az adott labdamenetet elveszítette? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje A azt az eseményt, hogy Dani megnyer egy labdamenetet, B_1 azt az eseményt, hogy az első adogatása sikeres, B_2 azt az eseményt, hogy a második adogatása sikeres.

Annak a valószínűsége, hogy Dani az első adogatásából nyerte meg a pontot:

$$P(A \mid B_1) \cdot P(B_1) = 0{,}9 \cdot 0{,}63 = 0{,}567.$$

Második adogatásra csak a labdamenetek 37%-ában kerül sor, amikor az első adogatása sikertelen volt. Annak a valószínűsége, hogy második adogatásából nyerte meg a pontot:

$$P(A \mid B_2) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B_1}) = 0{,}6 \cdot 0{,}85 \cdot 0{,}37 = 0{,}1887.$$

Annak a valószínűsége, hogy Dani nyerte a pontot, az előző két érték összege, tehát $P(A) = 0{,}7557$, annak a valószínűsége pedig, hogy Dani elvesztette a labdamenetet,

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}2443.$$

b) A kérdés a $P(B_1 \mid \overline{A})$ valószínűség. A feltételes valószínűség definíciója szerint:

$$P(B_1 \mid \overline{A}) = \frac{P(B_1\overline{A})}{P(\overline{A})} = \frac{P(\overline{A} \mid B_1) \cdot P(B_1)}{P(\overline{A})} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}63}{0{,}2443} \approx 0{,}258.$$

6. *a*) *Határozzuk meg* $\dfrac{x}{y}$ *értékét három tizedesjegy pontossággal, ha tudjuk, hogy* $2^x = 5^y$, *ahol* x *és* y *nullától különböző valós számok.*

b) *Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok lehető legbővebb részhalmazán:*

$$\frac{5}{2}\sqrt{\lg x} + 2\lg\sqrt{\frac{1}{x}} - 1 < 0. \qquad (16\ pont)$$

Megoldás. a) Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát és alkalmazzuk a logaritmus ismert azonosságait:

$$\lg 2^x = \lg 5^y,$$
$$x \lg 2 = y \lg 5.$$

Keresztbe osztva kapjuk:

$$\frac{x}{y} = \frac{\lg 5}{\lg 2} \approx 2{,}322.$$

b) Először megállapítjuk az egyenlőtlenség értelmezési tartományát.

A logaritmus függvény értelmezési tartománya miatt $x > 0$, valamint $\sqrt{\frac{1}{x}} > 0$, amiből szintén $x > 0$ következik. A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $\lg x \geq 0$, amiből $x \geq 1$, valamint $\frac{1}{x} > 0$, amiből ismét $x > 0$ következik. Összegezve mindezt az egyenlőtlenség értelmezési tartománya $x \geq 1$.

A bal oldalon álló kifejezés középső tagját a hatványozás és a logaritmus azonosságainak felhasználásával átalakítjuk:

$$2 \lg \sqrt{\frac{1}{x}} = 2 \lg x^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 2 \lg x = -\lg x.$$

Az $a = \sqrt{\lg x}$ (nemnegatív) új ismeretlen bevezetésével az egyenlőtlenség ezután így alakul: $-a^2 + 2{,}5a - 1 < 0$. A megfelelő egyenlet megoldásai $a = 2$ és $a = 0{,}5$, a negatív főegyütthatóra tekintettel az egyenlőtlenség megoldása ezért $a < 0{,}5$, vagy $a > 2$.

Figyelembe véve, hogy a nemnegatív, megoldandóak a $0 \leq \sqrt{\lg x} < 0{,}5$ és a $\sqrt{\lg x} > 2$ egyenlőtlenségek. Ezeket négyzetre emelve adódik $0 \leq \lg x < 0{,}25$, illetve $\lg x > 4$. Ezekből kapjuk, hogy

$$1 \leq x < \sqrt[4]{10} \quad (\approx 1{,}778), \quad \text{illetve} \quad x > 10\,000.$$

Átalakításaink ekvivalensek voltak.

7. *Az $f(x) = 2 \sin x$ függvény grafikonja és az x tengely által a $[0; \pi]$ intervallumon közrezárt síkidomot a $g(x) = 2 \cos x$ függvény görbéje két síkidomra bontja. Határozzuk meg a két síkidom területének arányát.* (*16 pont*)

Megoldás. A teljes síkidom területét az f 0 és π közötti integráljaként határozhatjuk meg:

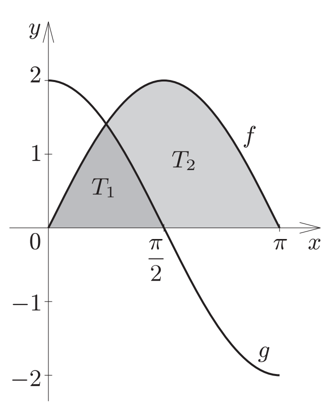
$$T = \int_0^\pi 2 \sin x \, dx = \big[-2 \cos x\big]_0^\pi = -(-2) - (-2) = 4.$$

A g függvény zérushelye ott van az adott intervallumban, ahol $\cos x = 0$, tehát $x = \frac{\pi}{2}$-nél.

A két függvény grafikonjának metszéspontját a $2 \sin x = 2 \cos x$ egyenlet megoldása adja. Ezt $\cos x \neq 0$-val osztva kapjuk, hogy $\operatorname{tg} x = 1$, azaz a vizsgált intervallumban $x = \frac{\pi}{4}$.

Így

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \sin x \, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x \, dx = \\ &= \big[-2 \cos x\big]_0^{\frac{\pi}{4}} + \big[2 \sin x\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \big(-\sqrt{2} - (-2)\big) + \big(2 - \sqrt{2}\big) = 4 - 2\sqrt{2}, \\ T_2 &= T - T_1 = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$



A két síkidom területének aránya:

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{4-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}-4}{4}=\left(\sqrt{2}-1\right):1\approx 0{,}414:1.$$

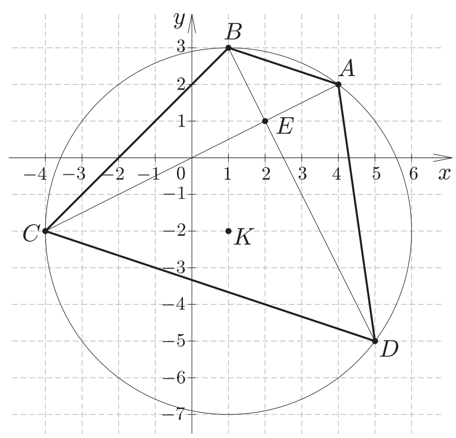
8. *Egy húrnégyszög átlói merőlegesek egymásra. Az átlók metszéspontja $E(2;1)$, a húrnégyszög AB és BC oldalának egyenlete $x+3y=10$, illetve $x-y+2=0$. Határozzuk meg a húrnégyszög csúcsainak koordinátáit és a négyszög köré írható kör egyenletét.*

(*16 pont*)

Megoldás. A két megadott oldalegyenes egyenletéből álló egyenletrendszert megoldva kapjuk a B pont koordinátáit. BC egyenletéből $y=x+2$, ezt AB egyenletébe visszaírva $x+3(x+2)=4x+6=10$, ahonnan $x=1$, majd $y=3$, tehát $B(1;3)$.

A BD átló egyenesének irányvektora például $\overrightarrow{EB}$, tehát a $(-1;2)$ vektor. Ezzel és az E ponttal a BD átló egyenletét felírhatjuk: $2x+y=5$.

Az AC átló merőleges erre az átlóra, ennek tehát normálvektora lesz a $(-1;2)$ vektor. Ezzel és az E ponttal az AC átló egyenlete: $-x+2y=0$.



Az A pont koordinátáit az AC átló és az AB oldalegyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásából kapjuk. Az átló egyenletéből $x=2y$, ezt AB egyenletébe visszaírva $5y=10$, ahonnan $y=2$, majd $x=4$, tehát $A(4;2)$.

A C pont koordinátáit az AC átló és a BC oldalegyenes egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásából kapjuk. Az átló egyenletéből $x=2y$, ezt BC egyenletébe visszaírva $2y-y+2=0$, ahonnan $y=-2$, majd $x=-4$, tehát $C(-4;-2)$.

A húrnégyszög köré írható kör megegyezik az ABC háromszög köré írható körrel. Ennek K középpontja megkapható például az AC és a BC oldal felezőmerőlegeseinek metszéspontjaként.

Az AC szakasz felezőpontja az origó, felezőmerőlegesének irányvektora megegyezik AC egyik normálvektorával, ami például a $(-1;2)$ vektor. Ezekkel a felezőmerőleges egyenlete $2x+y=0$.

A BC szakasz felezőpontja $(-1{,}5;0{,}5)$, felezőmerőlegesének normálvektora például a $\overrightarrow{CB}$, tehát az $(5;5)$ vektor. Ezekkel a felezőmerőleges egyenlete $5x+5y=-5$, azaz $x+y+1=0$.

A két felezőmerőleges egyenletéből álló egyenletrendszert kell megoldanunk. AC felezőmerőlegesének egyenletéből $y=-2x$, ezt a másik egyenletbe beírva $x-2x+1=0$, ahonnan $x=1$, majd $y=-2$, tehát $K(1;-2)$.

A kör sugarát megadja például a KB távolság, ami 5 egység, a kör egyenlete így $(x-1)^2+(y+2)^2=25$.

A D pont koordinátáit végül a kör egyenletéből és a BD átló egyenletéből álló egyenletrendszer megoldásaként kapjuk. A BD egyenletéből $y=5-2x$, ezt visszaírva a kör egyenletébe $(x-1)^2+(7-2x)^2=25$. A zárójeleket felbontva és rendezve az $5x^2-30x+25=0$ egyenletet kapjuk, melynek megoldásai $x=1$ és $x=5$. Az előbbi a B pontot adja meg, a másodikhoz tartozó y érték -5, tehát $D(5;-5)$.

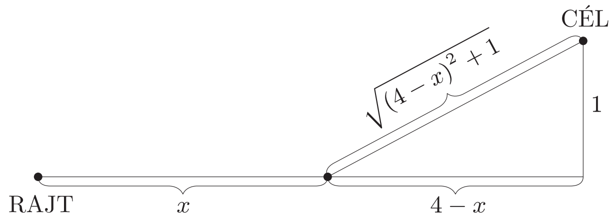
9. *Egy duatlon verseny rajtja egy egyenes tengerparton van, célja a vízben. Egyik lehetőség a táv teljesítésére, hogy először* 4 km*-t futunk a parton, majd* 90 *fokkal elfordulva* 1 km*-t úszunk a tengerben. Azonban megengedett bármikor letérni a futópályáról és elkezdeni úszni a cél felé. A homokos tengerparton* 6 km/h*, a vízben* 2 km/h *a sebességünk. A rajtvonaltól mérve milyen távolságra érdemes bevágni a vízbe,*

a) ha futva és úszva egyenlő távolságot szeretnénk megtenni;

b) ha a lehető leghamarabb szeretnénk célba érni? Hány km-t kell ekkor úsznunk, és mennyi idő alatt tudjuk így teljesíteni a verseny távját?

A válaszokat méter pontossággal adjuk meg. (*16 pont*)

Megoldás. Jelölje x azt a távolságot a rajtvonaltól mérve, amikor bevágunk a vízbe. Ekkor futva teszünk meg x km-t, a vízben pedig az *ábrán* látható derékszögű háromszög átfogóját, azaz $\sqrt{(4-x)^2+1}$ km-t.



a) Megoldandó az $x=\sqrt{(4-x)^2+1}$ egyenlet. Mindkét oldal pozitív, ezért négyzetre emelhetünk: $x^2=(4-x)^2+1$. Ebből kapjuk, hogy $x=\dfrac{17}{8}$.

Tehát a rajtvonaltól mérve 2,125 km-re kell bevágnunk a vízbe. Ekkor az úszva megtett távolság is valóban ennyi, hiszen

$$\sqrt{\left(4-\frac{17}{8}\right)^2+1}=\sqrt{\left(\frac{15}{8}\right)^2+\left(\frac{8}{8}\right)^2}=\frac{17}{8}.$$

b) A teljes táv megtételéhez szükséges időt ekkor a

$$t(x)=\frac{x}{6}+\frac{\sqrt{17-8x+x^2}}{2}\qquad(0<x<4)$$

függvény adja meg. Ennek a függvénynek keressük a minimumát, amit ott vehet fel, ahol a deriváltja nulla. Az összetett függvények deriválási szabályát felhasználva:

$$t'(x)=\frac{1}{6}+\frac{2x-8}{4\sqrt{17-8x+x^2}}=0.$$

Egyszerűsítve és rendezve: $12-3x=\sqrt{17-8x+x^2}$. Az x-re tett kikötés miatt a bal oldal is biztosan pozitív, így négyzetre emelhetünk, majd nullára rendezve a következő egyenletet kapjuk:

$$8x^2-64x+127=0.$$

Ennek megoldásai $x_{1,2}=4\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, melyek közül csak a 4-nél kisebb jön számításba, tehát $x=4-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\approx 3{,}646$.

A $t(x)$ függvény folytonos, és ellenőrizhető, hogy első deriváltjának előjele x-ben negatívból pozitívba vált, így a kapott x érték valóban minimumhelye t-nek.

Tehát a rajtvonaltól számítva 3,646 km megtétele után érdemes elkezdenünk úszni. Az úszás távja ekkor

$$\sqrt{(4-x)^2+1}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{18}{16}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}\approx 1{,}061\text{ km},$$

a teljes táv megtételéhez szükséges idő pedig

$$t\left(4-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{4}{6}-\frac{\sqrt{2}}{24}+\frac{3\sqrt{2}}{8}=\frac{4+2\sqrt{2}}{6}\approx 1{,}138\text{ óra}\approx 68{,}3\text{ perc}.$$

(Ha végigfutnánk a 4 km-t, akkor 70 perc alatt teljesítenénk a versenyt.)

Megjegyzés: A Snellius–Descartes-törvény felhasználásával a teljes visszaverődés határszöge is megoldást ad a feladatra.

Koncz Levente
Budapest