Szakaszokon értelmezett leképezések fixpontjairól

Reiman István emlékének[1]

Bevezetés

Egy intervallumon értelmezett valós értékű függvény *fixpontjának* nevezzük a szakasz egy olyan pontját, amelyet a leképezés a helyén hagy. (Ugyanúgy definiálhatjuk a sík vagy a tér intervallumain értelmezett leképezések fixpontjait.) A fixpontok fontos szerepet játszanak a magasabb matematikában, de szakaszokon értelmezett speciális leképezésekre szorítkozva érdekes fixpont-tételeket bizonyíthatunk a középiskolásoknak is. A 2. pontban megvizsgáljuk, hogyan vontak négyezer évvel ezelőtt négyzetgyököt a babiloniak, anélkül, hogy tudták volna, hogy fixponttételt alkalmaznak. A 3. pontban a szakaszokon definiált leképezések fixpontjainak létezését és az általuk definiált fokozatos megközelítések stabilitását vizsgáljuk. A 4. pontban két közgazdasági alkalmazást mutatunk be. Az első alkalmazás az adósságdinamikára vonatkozik. A második alkalmazásban a piaci egyensúlyt két szereplő és két termék esetén mint fixpontot határozzuk meg. Végül az 5. pontban néhány következtetést vonunk le. Külön függelék tartalmazza a 7. tétel a) pontjának elemi bizonyításvázlatát.

Hogyan vontak négyzetgyököt Babilonban?

A mai diákok már zsebszámológéppel vonnak négyzetgyököt, de annak idején, 1963-ban középiskolában még tanultam egy osztáshoz hasonlító négyzetgyökvonási eljárást. De már négyezer évvel ezelőtt a babiloniak is ismertek egy sokkal hatékonyabb ismétléses eljárást (iterációt) a feladat megoldására. Ha az $a > 0$ szám négyzetgyökét akarjuk kiszámítani, válasszunk egy tetszőleges kezdőértéket, jele $x_0 > 0$. Vegyük a következő új közelítő értéket:

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right).$$

Ismételjük meg az eljárást a következőképp! Legyen n egy természetes szám, és x_n az $\sqrt{a}$-nak az n-edik közelítése. Ekkor az $n+1$-edik közelítő értéket úgy kapjuk, hogy x_0 helyébe x_n-t írjuk:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \qquad n = 0, 1, 2, \dots . \tag{1}$$

Az eljárás alapgondolata az, hogy ha $x_n > \sqrt{a}$, akkor $\dfrac{a}{x_n} < \sqrt{a}$, de (1)-beli számtani közepük, x_{n+1} hibája ($\sqrt{a}$-tól mért eltérése) kisebb az x_n hibájánál ([1], 339. o.).

1. tétel. Bármilyen $x_0 > 0$ kezdőértékre az (1) eljárás adta $\{x_n\}$ sorozat tart a $\sqrt{a}$-hoz.

1. példa. A $\sqrt{2}$ kiszámításakor $x_0 = 1$ indulóértékre a következő sorozatot kapjuk: $x_1 = 1{,}5$; $x_2 = 1{,}41667$; $x_3 = 1{,}41422$, $x_4 = 1{,}41422$. A babiloni agyagtáblákon 60-as helyértékes rendszerben szerepel ez az érték ([2], 46–47. o.).

A bizonyítás előtt azonban be kell vezetnünk egy definíciót, és be kell látnunk egy segédtételt:

Definíció. A $[c; d]$ zárt szakasz x^* pontját a szakaszon értelmezett $y = f(x)$ leképezés *fixpontjának* nevezzük, ha a leképezés helyén hagyja a pontot: $x^* = f(x^*)$.

1. segédtétel. Legyen c és d két olyan pozitív szám, amely közrefogja $\sqrt{a}$-t*:* $c < \sqrt{a} < d$*.* A $[c; d]$ szakaszon értelmezett

$$y = f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) \tag{2}$$

leképezés egyetlen fixpontja $\sqrt{a}$, azaz $f\left(\sqrt{a}\right) = \sqrt{a}$.

Bizonyítás. Helyettesítsük be a (2) egyenlet mindkét oldalába x^*-t:

$$x^* = \frac{1}{2}\left(x^* + \frac{a}{x^*}\right).$$

Rendezve: $(x^*)^2 = a$. $\square$

[1] Az idén elhunyt Reiman István 40 éven keresztül vezette a magyar középiskolás matematikustehetségek gondozását.

Rátérünk az 1. tétel **bizonyítására.** A számtani és mértani közép közti összehasonlítás alapján

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geq \sqrt{a},$$

tehát $\{x_{n+1}\}$ alulról korlátos sorozat. De az 1. segédtétel igazolásához hasonlóan az is bizonyítható, hogy az $\{x_{n+1}\}$ csökkenő sorozat: $x_{n+1} \leq x_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Az analízis ismert tétele szerint egy alulról korlátos és csökkenő sorozatnak van határértéke, jele A. Mivel a (2)-ben szereplő f függvény folytonos, a bal és a jobb oldal határértéke is A: azaz fixpont, tehát $A = \sqrt{a}$. $\square$

Meglepő, hogy a babiloniak ilyen hatékony négyzetgyökvonási eljárást dolgoztak ki. Érdekességként megemlítjük, hogy a szabály a $g(x) = x^2 - a$ függvény esetére az (1670 körüli) ún. Newton-féle *érintő módszer,* amelyet nemlineáris sima függvények gyökeinek kiszámítására használunk. Az alapötlet: az x^* gyökhöz elég közeli x_0 kezdőpontból indulva, meghatározzuk, hogy a függvényhez az x_0-ban húzott érintő milyen x_1 pontban metszi a vízszintes tengelyt. Az eljárást megismételve, az x_n pontban húzott érintő az x_{n+1} pontban metszi a vízszintes tengelyt. Konvergencia esetén (ami általában nem biztos), határértékben a $g(x^*) = (x^*)^2 - a = 0$ gyököt kapjuk.

Mikor létezik fixpont?

A négyzetgyök kiszámításához használt függvénynek van fixpontja. Felvetődik a kérdés: mikor van a $[c; d]$ szakaszon definiált f függvénynek fixpontja?

Ha képzeletben ábrát készítünk, akkor láthatjuk, hogy a függvény grafikonját éppen egy fixpontban metszi az $y = x$ átló, ha létezik a fixpont. Ezen megfigyelés alapján két ellenpéldát mutatunk, amikor nincs fixpont. Az egyik eset, amikor a függvény nem folytonos, és a grafikon egyszerűen átlépi az átlót. A másik eset, amikor az értelmezési tartománynak nem része a képe: például a $[0; 1]$ szakaszt az $f(x) = x + 0{,}2$ leképezés az $[1{,}2; 1{,}3]$ szakaszba képezi le. Ha nem engedjük meg ezt a két lehetőséget, akkor lesz fixpontunk.

2. tétel. Ha az $I = [c; d]$-on (szakaszon) definiált f folytonos függvény értékkészlete I-be esik, akkor létezik legalább egy fixpontja. Képletben: ha $f(I) \subset I$, akkor van olyan $c \leq x^* \leq d$ pont, amelyre $x^* = f(x^*)$.

Bizonyítás. Vegyük a $g(x) = f(x) - x$ folytonos segédfüggvényt. Feltevésünk szerint $g(c) = f(c) - c \geq 0$ és $g(d) = f(d) - d \leq 0$. Ha az egyik egyenlőtlenségben egyenlőség áll, akkor fixpontot kaptunk. Tehát mindkét esetben föltehetjük a szigorú egyenlőtlenséget. Az analízis ún. Bolzano-tétele (1817) értelmében létezik a $[c; d]$ szakasznak legalább egy olyan x^* pontja, amelyre $g(x^*) = 0$, azaz x^* egy fixpont. $\square$

Például a négyzetgyökvonási eljárásban szereplő leképezés folytonos, és a $(0; a]$ szakaszt a $\left[\sqrt{a}; a\right] \subset (0; a]$ szakaszba képezi le.

További kérdés: mikor tart a leképezés ismétlése a fixponthoz? Bizonyítás nélkül kimondjuk a megfelelő tételt.

3. tétel. Tegyük föl, hogy az egyenesen értelmezett folytonosan differenciálható f leképezésnek létezik egy $x^* = f(x^*)$ fixpontja. Az $x_{n+1} = f(x_n)$ iteráció tart e fixponthoz, ha az $\left|f'(x^*)\right| < 1$ és x_0 megfelelően közel esik a fixponthoz.

2. példa. Lineáris leképezés esetén a 3. tétel könnyen igazolható. Valóban, legyen $f(x) = ax + b$. Egyetlen fixpont létezik: $x^* = f(x^*) = ax^* + b$, azaz $x^* = \dfrac{b}{1-a}$, feltéve, hogy $a \neq 1$. Az $x_{n+1} = ax_n + b$ iterációból vonjuk ki az $x^* = ax^* + b$ egyenletet: $x_{n+1} - x^* = a(x_n - x^*)$. Felismerve a mértani sorozat definícióját, $x_n - x^* = a^n(x_0 - x^*)$, amely valóban akkor tart 0-hoz, ha $|a| < 1$, ez pedig $f'(x^*) = a$ miatt a 3. tétel feltétele.

A 3. tétel szemléletesen azt jelenti, hogy a fixpont közelében a nemlineáris leképezést jól közelíthetjük az $y = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*)$ lineáris leképezéssel.

Többdimenziós térben mind a tételpár, mind a bizonyítás jóval bonyolultabb: a 2. tétel Brouwer-féle fixponttétel (1912), [1], 23.19. tétel, a 3. tétel Ljapunov 1. megközelítéseként (1891) ismert.

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban a sík pozitív lineáris leképezéseinek egy speciális osztályára szorítkozunk, amelyeket lényegében Markov orosz matematikus tanulmányozott először 1906-ban.

Definíció. 1. A sík $u = f(x; y)$ és $v = g(x; y)$ leképezéspárját *Markov-félének* nevezzük, ha

$$u = f(x; y) = ax + (1 - b)y \quad \text{és} \quad v = g(x; y) = (1 - a)x + by,$$

ahol $0 < a, b < 1$.

2. A sík $x + y = 1$, $x, y \geq 0$ feltételekkel határolt részét a sík *egységszimplexének* nevezzük. (Szemléletesen szólva, a sík $(0; 1)$ és $(1; 0)$ pontját öszekötő szakaszról van szó.)

Belátjuk a következő segédtételt.

2. segédtétel. Minden Markov-leképezés a sík egységszimplexét az egységszimplexbe képezi le.

Bizonyítás. Egyszerű számolással a pozitivitási feltevés miatt $u, v \geq 0$. Az összeg szintén megőrződik:

$$u + v = ax + (1-b)y + (1-a)x + by = x + y = 1. \quad \square$$

Belátjuk, hogy most is létezik egyetlen fixpont.

4. tétel. Az egységszimplexre leszűkítve, a Markov-leképezésnek pontosan egy fixpontja van*:*

$$x^* = \frac{1-b}{2-a-b} \quad \textit{és} \quad y^* = \frac{1-a}{2-a-b}.$$

Bizonyítás. Írjuk be az $y = 1 - x$ feltételt az első linearitási összefüggésbe:

$$u = ax + (1-b)(1-x).$$

Az $u = x$ feltételből adódik a fixpont. $\square$

Tekintsük a Markov-leképezés által definiált dinamikát!

(3) $$x_{n+1} = ax_n + (1-b)y_n \quad \text{és} \quad y_{n+1} = (1-a)x_n + by_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Stabil-e a Markov-leképezés fixpontja? Igen.

5. tétel. Bármely síkbeli Markov-leképezés által definiált dinamika tetszőleges $0 \leq x_0 \leq 1$, $y_0 = 1 - x_0$ kezdő állapotpár esetén a fixponthoz tart.

Bizonyítás. Most is elegendő az első egyenlet elemzése, feltéve, hogy figyelembe vesszük az $y_n = 1 - x_n$ korlátozást. Valóban

$$x_{n+1} = ax_n + (1-b)(1-x_n) = (a-1+b)x_n + 1 - b$$

átalakítással visszavezettük a feladatot a 2. példában szereplő feladatra. És teljesül a stabilitási feltétel is, hiszen $|a+b-1| < 1$ nyilvánvalóan igaz. $\square$

3. példa. Ha pozitív állandók helyett nemnegatívakkal dolgozunk, akkor elromlik a stabilitás. Például $a = 0 = b$ esetén a rendszer fűrészfogszerűen ciklizál:

$$x_{2k} = x_0 \quad \text{és} \quad x_{2k+1} = 1 - x_0.$$

A valószínűség-számításban fontos szerepet játszanak az ún. *Markov-láncok.* A most vázolt esetben két állapot van: 1 és 2. Ha az n-edik időpontban x_n, illetve $y_n = 1 - x_n$ annak valószínűsége, hogy a rendszer az 1., illetve a 2. állapotban van, akkor a (3) egyenletrendszer az $n+1$-edik időpont valószínűségeit adja meg. Itt a és b annak a feltételes valószínűsége, hogy a rendszer az 1., illetve a 2. állapotban marad. ($1-b$ és $1-a$ viszont annak a feltételes valószínűsége, hogy a rendszer a 2., illetve az 1. állapotból a másikba megy. Az $(x^*; y^*)$ fixpont az egyensúlyi valószínűség-eloszlás.

Két közgazdasági alkalmazás

Két közgazdasági alkalmazást mutatunk be: az első az adósságdinamikát elemzi, a második a piaci egyensúlyt.

Adósságdinamika. Napjainkban az adósságdinamika különösen érzékeny kérdés, és az eddigiek alapján a lényege könnyen megragadható. Éves felbontásban számolunk, és legyen az n-edik év elején az államadósság értéke D_n és az éves *elsődleges* költségvetési hiány B_n. Bevezetve még az ún. R *kamattényezőt* $(1+\text{kamatláb})$, definíció szerint igaz az adósságdinamika alapegyenlete:

$$D_{n+1} = RD_n + B_n, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Kényelmetlen abszolút számokban gondolkozni, ezért az éves nemzeti jövedelemhez (jele: Y_n, angol rövidítése: GDP) viszonyított értékekkel dolgozunk:

$$d_{n+1} = \frac{D_{n+1}}{Y_n} \quad \text{és} \quad b_n = \frac{B_n}{Y_n}.$$

Az egyszerűség kedvéért feltesszük, hogy az elsődleges hiánynak a nemzeti jövedelemhez viszonyított hányada állandó, jele $b > 0$. További feltevés: a nemzeti jövedelem évente változatlan $g > 0$ növekedési tényező szerint bővül: $Y_n = gY_{n-1}$. Bevezetjük az $R > 0$ kamattényező és a g növekedési tényező hányadát ($=1+$növekedési ütem), a relatív kamattényezőt: $r = \dfrac{R}{g}$, és feltesszük róla, hogy kisebb mint 1: $r < 1$. (Figyelem: mind a kamat*láb,* mind a növekedési *ütem* lehet negatív, különösen, ha az inflációt kiszűrjük!) Ekkor az adósságdinamika abszolút helyett relatív változókra is felírható:

$$d_{n+1} = rd_n + b, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Kérdéspár: mi a relatív adósságdinamika fixpontja, és mikor stabil? A választ a 2. példa alapján a következő tétel adja.

6. tétel. A $b > 0$ *és* $0 < r < 1$ feltevések esetén a relatív adósságdinamika fixpontja pozitív*:*

$$d^* = \frac{b}{1-r} > 0,$$

és stabil.

Az elsődleges hiány mellett fontos szerepet játszik a költségvetési hiány, amely az elsődleges hiány mellett a kamatkiadást is tartalmazza: $C_n = B_n + (R-1)D_n$. Relatív értékekre térve:

$$c_n = \frac{C_n}{Y_n} \quad \text{és} \quad c_n = b_n + \left(r - g^{-1}\right)d_n.$$

Az Európai Unióban előírt ún. maastrichti kritériumok közül kettő éppen d_n-re és a c_n-re vonatkozik: 1.) a költségvetési hiány nemzeti jövedelemhez viszonyított értéke nem lehet nagyobb, mint 3 százalék: $c_n < 0{,}03$ és 2.) az adósságállomány nemzeti jövedelemhez viszonyított értéke nem lehet nagyobb, mint 60 százalék: $d_n < 0{,}6$. Sajnos, 2011-ben országunk egyik követelménynek sem tett eleget, $c_{2011} = 0{,}06$; $d_{2011} = 0{,}8$ volt. Figyelem: modellünk számos fontos tényezőtől eltekint: például a kamatláb függhet az adóssághányadtól stb.

Piaci egyensúly létezése. A matematikai közgazdaságtan egyik legfontosabb kérdése a piaci egyensúly létezése. Ebben a pontban definiáljuk a piaci egyensúly legegyszerűbb modelljét (amikor két termék és két fogyasztó létezik), és a 3. pont eredményeit felhasználva igazoljuk a piaci egyensúly létezését, sőt kiszámítjuk az értékét ([3], 541–543. o.). A két termék a szokásos tankönyvpéldában alma és narancs, de reálisabb esetben lehet például az ipar és a mezőgazdaság, vagy korszerűbb szemléletben az anyagi termelés és szolgáltatás.

Két szereplőnk indexe 1 és 2. Az egyes szereplők kiinduló készletpárja $(v_1; w_1)$, illetve $(v_2; w_2)$, nemnegatív számok, de egyik vektor sem nulla. A jelölések egyszerűsítése érdekében olyan mértékegységeket választunk, hogy az összkészlet egységnyi legyen:

(4) $$v_1 + v_2 = 1 \quad \text{és} \quad w_1 + w_2 = 1.$$

A piaci egyensúly egyidejűleg háromfajta követelményt jelent.

a) A csere révén a javakat újra elosztják: olyan $(x_1; y_1)$ és $(x_2; y_2)$ nemnegatív pár elfogadható, amelyet a csere lehetővé tesz (vö. (4)):

(5) $$x_1 + x_2 = 1 \quad \text{és} \quad y_1 + y_2 = 1.$$

b) Mivel modellünkben nincs pénz, árak helyett árarányokról beszélünk. Ha a két termék áraránya $p > 0$, akkor 1 egység 1. termékért p egység 2. terméket kell adni. Eszerint mindkét szereplő a pozitív p árarány mellett ki tudja fizetni a cserét:

(6) $$px_k + y_k = pv_k + w_k, \qquad k = 1, 2.$$

c) A közgazdaságtanban szinte általánosan elfogadott, hogy a döntéshozók maximalizálják célfüggvényüket, amely megmondja, hogy a választott döntés mennyire jó. Itt a fogyasztástól függő *hasznosságfüggvényüket* maximalizálják a cserepartnerek:

(7) $$u_k(x_k; y_k) = \alpha_k \log x_k + (1-\alpha_k)\log y_k \to \max, \quad 0 < \alpha_k < 1, \quad k = 1, 2.$$

Mielőtt tovább haladnánk, néhány mondatos magyarázatot fűzünk e hasznosságfüggvényekhez. 1) Minden $u_k(x_k; y_k)$ hasznosságfüggvénytől elvárható, hogy mindkét változó szigorúan *növekvő* függvénye legyen. 2) A legtöbb terméknél (kivéve a földimogyorót) a fogyasztás mennyiségének újabb egységnyi növelése egyre kevésbé emeli elégedettségünket: a függvény szigorúan *konkáv.* 3) Legegyszerűbb esetben az egyes termékek fogyasztási hatásai összeadódnak. Egyik legegyszerűbb ilyen függvény a fent bevezetett logaritmikus függvény, amelyben a két termék hasznossági súlya a két fogyasztónál különbözhet. (Ugyanakkor a függelékben bemutatott ekvivalens változatban az összeadás helyett szorzat szerepel!)

A feladat nehézségét a fixpont-tételeknél megszokott körkörösség jelenti: egyrészt adott piaci áraktól függ az egyes partnerek vagyona és kereslete; másrészt a mérlegfeltételek megszabják az egyensúlyi piaci árakat. Ez a kettősség megjelenik a bizonyításban is.

Egyszerű számolással belátható, hogy ilyen egyensúlyi rendszer létezik.

7. tétel. A fent definiált piaci egyensúly létezik, és az egyensúlyi árarány

(8) $$p^* = \frac{w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2}{1 - v_1\alpha_1 - v_2\alpha_2},$$

és az optimális fogyasztási párok

(9) $$x_k^* = \frac{\alpha_k(p^* v_k + w_k)}{p^*} \quad \text{és} \quad y_k^* = (1-\alpha_k)(p^* v_k + w_k), \qquad k = 1, 2.$$

Bizonyítás. Először tetszőleges p relatív ár mellett határozzuk meg a k-adik szereplő optimális fogyasztási párját, majd ezek segítségével felírjuk a piaci egyensúlyi relatív árra vonatkozó fixpont-egyenletet.

1) A feltételes optimalizálással kezdjük a számítást. A rövidség kedvéért $m_k = pv_k + w_k$ jelölje a k-adik szereplő jövedelmét. A (6) pénzügyi feltételből kifejezhető a második termék fogyasztása: $y_k = m_k - px_k$. Behelyettesítve az u_k célfüggvénybe [(7)], egyváltozós függvényt kapunk:

$$U_k(x_k) = \alpha_k \log x_k + (1-\alpha_k)\log(m_k - px_k).$$

Konkáv függvényünk maximuma létezik, és ott a derivált nulla:

$$U_k'(x_k) = \frac{\alpha_k}{x_k} - \frac{p(1-\alpha_k)}{m_k - px_k}.$$

Egyszerű rendezéssel adódik a paraméteres maximum:

$$x_k = \frac{m_k\alpha_k}{p} \quad \text{és} \quad y_k = (1-\alpha_k)m_k. \tag{10}$$

A függelékben elemi eszközökkel határozzuk meg a maximumot.

2) Rátérhetünk a piaci áregyensúly meghatározására. Behelyettesítjük a most meghatározott paraméteres optimumokat (5) első mérlegfeltételébe:

$$1 = x_1 + x_2 = \frac{m_1\alpha_1}{p} + \frac{m_2\alpha_2}{p},$$

majd helyettesítsük be az m_k-k meghatározását:

$$p = (pv_1 + w_1)\alpha_1 + (pv_2 + w_2)\alpha_2.$$

Rendezve p-re a fixpont-egyenletet:

$$p(1 - v_1\alpha_1 - v_2\alpha_2) = w_1\alpha_1 + w_2\alpha_2,$$

azaz a (8) képletben szereplő p^* adódik. Innen helyettesítéssel kapjuk (9)-et. □

4. példa. Még ebben a kétszereplős–kéttermékes modellben is túl sok paraméter van, ezért szemléltetés kedvéért tovább egyszerűsítjük a modellt. Feltesszük, hogy kezdetben az 1. szereplőnek csak a v-terméke van, a 2.-nek csak w (specializáció): $v_1 = 1$, $w_1 = 0$ és $v_2 = 0$, $w_2 = 1$. Ekkor az egyensúlyi relatív ár

$$p^* = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}$$

és a fogyasztási négyes

$$x_1^* = \alpha_1, \quad y_1^* = \alpha_2 \quad \text{és} \quad x_2^* = 1-\alpha_1, \quad y_2^* = 1-\alpha_2.$$

A számolás végére érve elmondjuk, hogy e tétel tetszőleges számú szereplőre és termékre érvényes. Bonyolultabb a bizonyítás, ha a célfüggvények nem olyan egyszerűek, mint a 7. tételben. Az általános tételt Arrow és Debreu 1954-ben igazolta. Kiemeljük, hogy a tétel köznapi nyelven azt mondja, hogy a piacnál nincs jobb elosztási mechanizmus. Ha egy jóindulatú diktátor más árakat írna elő, vagy más fogyasztást írna elő, akkor legalább az egyik fogyasztó rosszabbul járna, mint a piaci elosztásnál.

Ez az optimalitási tétel azonban csak súlyos megszorítások mellett érvényes. Ki kell zárnunk a következő bonyodalmakat. *a*) Tökéletlen verseny van: (kevés szereplő versenyez, ezért a hatékony mennyiségnél kevesebbet termelnek bizonyos termékből). *b*) *Külső (externális) hatások* lépnek föl (pl. vasgyártásnál a környezetszennyezéssel növelt társadalmi költségek nagyobbak a piaci költségeknél, s ezért a hatékony mennyiségnél több vasat gyártanak). *c*) Közjavak léteznek (pl. minden egyes fogyasztó úgy érezheti, hogy semmi baj nem történik, ha egyedül ő nem fizet az országos járványelhárításért, a TV-műsorért stb., s ezért az optimálisnál kevesebbet termelnek a közjavakból). *d*) Aszimmetrikus információ akadályozza a biztosítást (nem lehet jó egészségbiztosítást venni, mert az egészségesek nem hajlandók az átlagos kockázatot megfizetni). *e*) Sokan nem találnak a piacon tisztességes megélhetést.

Külön, itt nem tárgyalható kérdés: hogyan lehet az egyensúlyt kiszámítani? Van-e olyan dinamikus piaci algoritmus, amelynek végeredménye az egyensúlyi árvektor?

pt plus3pt

Következtetések

pt plus3pt A felsőbb matematika számos területén találkozunk leképezések fixpontjaival, azaz olyan pontokkal, amelyeket a leképezések változatlanul hagynak. A legegyszerűbb esetet már a babiloniak is ismerték, természetesen nem tudták, hogy fixponttételeket használnak, amikor a 2 négyzetgyökét nagy pontossággal meghatározták. Később tágult a kör, és Newton általános módszert adott egyváltozós nem lineáris sima függvények gyökeinek numerikus meghatározására. A függvények fixpontjainak létezését azonban csak a 20. században kezdték el módszeresen vizsgálni. A mozgalom egyik látványos eredménye a piaci egyensúly létezésének bizonyítása volt. Minden nehézségük ellenére az eredmények a legegyszerűbb esetekben érdeklődő középiskolásoknak is elérhetővé tehetők.

pt plus3pt

Függelék. A célfüggvény maximumának elemi meghatározása

pt plus3pt Ebben a pontban elemi eszközökkel, a differenciálszámítás alkalmazása nélkül meghatározzuk a célfüggvény maximumát, a k indexet eldobva. A logaritmikus függvény helyett exponenciális transzformáltját tekintjük: $x^\alpha y^{1-\alpha} \to \max$. Jó közelítéssel feltehetjük, hogy α racionális szám, például $\frac{a}{c}$. A célfüggvény c-edik hatványra emelésével egész kitevős célfüggvényt kapunk:

$$x^a y^b \to \max., \qquad b = c - a.$$

Az 1. termék mértékegységének újradefiniálásával $p = 1$, ezért korlátozó feltételünkből kiküszöböltük az árakat: $x + y = m$.

Alkalmazzuk a számtani és a mértani közép közti egyenlőtlenséget az a darab $\frac{x}{a}$ és a b darab $\frac{y}{b}$ pozitív számra. A számtani közép

$$\frac{1}{a+b}\left(a\frac{x}{a} + b\frac{y}{b}\right) = \frac{m}{a+b},$$

függetlenül x és y választásától. A mértani közép, pontosabban $(a+b)$-edik hatványa

$$\frac{1}{a^a b^b} x^a y^b,$$

a célfüggvény állandószorosa, s az állandó elhagyható. Az egyenlőtlenség szerint a maximum tehát akkor valósul meg, ha a két közép egyenlő, tehát minden átlagolandó egyenlő, vagyis

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{m-x}{b}, \quad \text{azaz} \quad x^* = \frac{am}{a+b} = \alpha m \quad \text{és} \quad y^* = (1-\alpha)m.$$

Hivatkozások

[1] Laczkovich, M. – T. Sós, V. (2007): *Analízis, II. kötet,* Nemzeti Tankönyvkiadó (Budapest).

[2] Neugebauer, O. (1984): *Egzakt tudományok az ókorban,* Gondolat (Budapest).

[3] Varian, H. (2001): *Mikroökonómia középfokon,* KJK (Budapest).

Simonovits András