Megoldásvázlatok a 2012/1. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:*

$$x^2+\frac{2x}{x+5}+\frac{1}{x^2+10x+25}=25. \qquad (12\ pont)$$

Megoldás. A nevezők miatt: $x\neq-5$. Az egyenletet a következő alakba is írhatjuk:

$$\left(x+\frac{1}{x+5}\right)^2=25.$$

Két eset lehetséges:

I. eset: Ha $x+\dfrac{1}{x+5}=5$, akkor rendezés után az $x^2=24$ másodfokú egyenletet kapjuk. Ennek gyökei: $x_1=\sqrt{24}$, $x_2=-\sqrt{24}$. Mindkét gyök megoldása az egyenletnek.

II. eset: $x+\dfrac{1}{x+5}=-5$, akkor rendezés után az $x^2+10x+26=0$ másodfokú egyenlethez jutunk. A diszkriminánsa negatív, így ebben az esetben nincs valós gyök.

Az eredeti egyenlet két gyöke: $x_1=\sqrt{24}$, $x_2=-\sqrt{24}$.

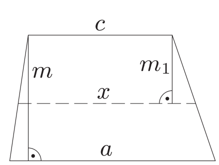
2. *Egy trapéz párhuzamos oldalai a és c. Mekkora az a szakasz, amely párhuzamos az alapokkal, és felezi a trapéz területét?* (*12 pont*)

Megoldás. Jelölje a trapéz területét T, a felső kis trapézét t_1, az alsó kis trapézét pedig t_2. Tudjuk, hogy $T=2t_1$, il-

$$\frac{a+c}{2}\cdot m=2\cdot\frac{x+c}{2}\cdot m_1, \tag{1}$$

$$\frac{a+c}{2}\cdot m=2\cdot\frac{x+a}{2}(m-m_1). \tag{2}$$

letve $T=2t_2$, azaz



Az (1) egyenletből $m_1=\dfrac{a+c}{2(x+c)}\cdot m$, ezt behelyettesítve a (2) egyenletbe:

$$\frac{a+c}{2}\cdot m=(x+a)\cdot\left(m-\frac{a+c}{2\cdot(x+c)}\cdot m\right).$$

Az egyenletet m-mel $(m\neq 0)$ osztva, majd néhány átalakítást végezve:

$$\frac{a+c}{2}=(x+a)\cdot\left(1-\frac{a+c}{2\cdot(x+c)}\right),$$

$$a+c=(x+a)\cdot\left(2-\frac{a+c}{(x+c)}\right),$$

$$(a+c)(x+c)=2(x+a)(x+c)-(x+a)(a+c),$$

$$ax+ac+cx+c^2=2x^2+2cx+2ax+2ac-ax-cx-a^2-ac,$$

$$c^2=2x^2-a^2.$$

Vagyis a keresett szakasz hossza: $x=\sqrt{\dfrac{a^2+c^2}{2}}$.

3. *Oldjuk meg az* $\log_x\left(5x^2\right)\cdot\log_5^2 x=1$ *egyenletet a valós számok halmazán.* (*13 pont*)

Megoldás. Az egyenlet értelmezési tartománya: $x > 0$ és $x \neq 1$.

A logaritmus azonosságait felhasználva az egyenlet átírható a következő alakba:

$$(\log_x 5 + \log_x x^2) \cdot \log_5^2 x = 1, \qquad \left(\frac{1}{\log_5 x} + 2\right) \cdot \log_5^2 x = 1.$$

A szorzást elvégezve és rendezve: $2\log_5^2 x + \log_5 x - 1 = 0$. Ebből:

$$(\log_5 x)_1 = \frac{1}{2}, \quad (\log_5 x)_2 = -1.$$

Az egyenlet megoldása: $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = \dfrac{1}{5}$.

4. *Egy büfében szendvicset és pizzát árulnak. Egy szendvicsen* 30%, *egy pizzán* 50% *haszna van a kereskedőnek. Egyik nap ugyanannyi szendvicset adott el, mint pizzát, így* 34% *haszna lett. Másnap viszont kétszer annyi pizzát vettek meg, mint szendvicset.*

a) Mennyi haszna lett a büfésnek az eladott árukból a második napon?

b) Mennyi haszna lett volna, ha kétszer annyi szendvicset adott volna el, mint pizzát?

(*14 pont*)

Megoldás. *a*) Jelöljük a-val egy szendvics, b-vel egy pizza önköltségi árát. Ha az első alkalommal x darabot adott el a kereskedő mindkettőből, akkor 34%-os haszna volt, tehát:

$$\begin{aligned} x \cdot 0{,}3a + x \cdot 0{,}5b &= x(a+b) \cdot 0{,}34, \\ 0{,}16b &= 0{,}04a, \\ 4b &= a. \end{aligned}$$

Másnap y darab szendvicset és $2y$ darab pizzát adott el. Ha p%-os volt a haszna, akkor

$$\begin{aligned} y \cdot 0{,}3a + 2y \cdot 0{,}5b &= (ya + 2yb) \cdot \frac{p}{100}, \\ \frac{0{,}3a + b}{a + 2b} &= \frac{p}{100}. \end{aligned}$$

Felhasználva az $a = 4b$ összefüggést:

$$\begin{aligned} \frac{0{,}3 \cdot 4b + b}{4b + 2b} &= \frac{p}{100}, \\ \frac{2{,}2}{6} &= \frac{p}{100}, \\ 36{,}\dot{6} &= p. \end{aligned}$$

Tehát a büfésnek kb. 36,7%-os haszna volt.

b) Ha a kereskedő y db szendvicset adott el és ez kétszer annyi, mint ahány darab pizzát eladott, akkor

$$y \cdot 0{,}3a + \frac{y}{2} \cdot 0{,}5b = \left(ya + \frac{y}{2}b\right) \cdot \frac{p}{100}, \quad \text{azaz} \quad 0{,}3a + \frac{0{,}5b}{2} = \left(a + \frac{b}{2}\right) \cdot \frac{p}{100}.$$

Mivel $a = 4b$, azért

$$0{,}3 \cdot 4b + \frac{0{,}5b}{2} = \left(4b + \frac{b}{2}\right) \cdot \frac{p}{100}, \quad 1{,}45b = 4{,}5b \cdot \frac{p}{100}, \quad \text{azaz} \quad p = \frac{1{,}45 \cdot 100}{4{,}5} \approx 32{,}2.$$

Így a kereskedőnek kb. 32,2 % haszna lett volna.

II. rész

5. *Egy* 4 m *átmérőjű kör alakú biliárdasztal O középpontjától* 0,5 *méterre levő P pontban van egy biliárdgolyó. A golyót úgy kell ellökni, hogy kétszeri visszaverődés után ismét a P ponton haladjon át. Mekkora szöget zár be az ellökés iránya a PO iránnyal?*

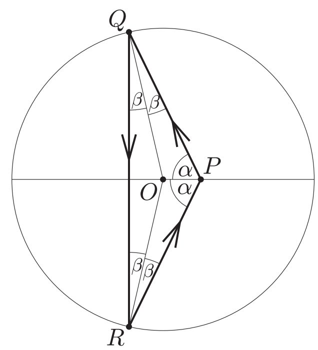
(*16 pont*)

Megoldás. A PO-val $0°$-os és $180°$-os szöget bezáró irányok teljesítik a feltételeket. Vizsgáljuk az ezektől eltérő, α szöget bezáró irányt.

A golyó a P pontból indulva a Q pontban, majd az R pontban ütközve visszaérkezik a P pontba. Az ütközés törvénye szerint $PQO = OQR$ és $QRO = ORP$. Az OQR háromszög egyenlő szárú. A beesés és visszaverődés szöge a β szög. A szimmetria miatt $OPQ = OPR = \alpha$, így a PQR háromszögből:

$$2\alpha + 4\beta = 180° \quad \text{és} \quad \beta = 45° - \frac{\alpha}{2}.$$

Az OPQ háromszögből a szinusztétel szerint: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{OQ}{OP}$. Az $OQ = 4 \cdot OP$ és a $\beta = 45° - \dfrac{\alpha}{2}$ összefüggésből:



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4 \cdot OP}{OP} = 4.$$

Innen:

$$\sin\alpha = 4 \cdot \sin\left(45° - \frac{\alpha}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\sin^2\alpha = 8\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = 8\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

A trigonometrikus azonosságokat figyelembe véve: $\sin^2\alpha = 8(1 - \sin\alpha)$, vagyis $\sin^2\alpha + 8\sin\alpha - 8 = 0$. Ennek gyökei:
$(\sin\alpha)_1 = -4 + \sqrt{24}$, ahonnan $\alpha_1 \approx 64°$,
$(\sin\alpha)_2 = -4 - \sqrt{24}$, ebből nincs megoldás, mert $\sin\alpha < -1$.

A keresett szög: $\alpha \approx 64°$.

6. *Legyen egy sorozat általános tagja a következő képlettel adva:*

$$a_n = \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4}.$$

a) Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *határértéket.*

b) Határozzuk meg azt az N *küszöbszámot, amelytől kezdve a sorozat elemei a sorozat határértékétől* 10^{-2}*-nál kisebb értékkel térnek el.* (*16 pont*)

Megoldás. *a*)

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{4}{n^2}} = 2.$$

b) Meg kell állapítanunk, hogy milyen n-től kezdve lesz $|a_n - A| < \dfrac{1}{100}$, azaz

$$\left|\frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 4} - 2\right| < \frac{1}{100}.$$

Elvégezve az összevonást kapjuk:

$$\left|\frac{3n - 9}{n^2 + 4}\right| < \frac{1}{100}.$$

Mivel $n > 3$ esetén $\dfrac{3n - 9}{n^2 + 4} > 0$, azért a

$$\frac{3n - 9}{n^2 + 4} < \frac{1}{100}$$

egyenlőtlenséget kell vizsgálnunk. Mindkét oldalt beszorozzuk a közös nevezővel és utána rendezzük az egyenletet:

$$n^2 - 300n + 904 > 0.$$

Az így kapott másodfokú egyenlet megoldásai: $n_1 \approx 3{,}04$ és $n_2 \approx 296{,}96$.

Vagyis a keresett sorszám: 297.

7. *Az iskola konyhája két helyről szokott burgonyát rendelni* 10 kg-*os csomagolásban. Az* A *beszállítótól kétszer annyit rendelnek, mint a* B-*től. Az* A *beszállító* 80%, *a* B *pedig* 60% *eséllyel szállítja a rendelt mennyiséget egy héten belül.*

a) Mennyi az esélye, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott 10 kg-*os csomagra több, mint egy hetet kell várni?*

b) Ha tudjuk, hogy egy héten belül leszállították a burgonyát, akkor mekkora az esélye annak, hogy A-*tól rendelték?*

c) Ha a szállítás késése esetén 10% *engedménnyel adják a burgonyát, és egy* 10 kg-*os csomag ára* 800 Ft *mindkét beszállítónál, akkor várhatóan hány forintot fizetnek egy* 10 kg-*os csomagért?* (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Legyen x a B beszállítótól rendelt 10 kg-os csomagok száma.

Az egy héten túli rendelések várható száma A-nál: $0{,}2 \cdot 2x$, B-nél: $0{,}4x$, összesen $0{,}8x$. Összes rendelés mennyisége: $3x$.

$$P = \frac{0{,}2 \cdot 2x + 0{,}4x}{3x} = \frac{0{,}8}{3} \approx 0{,}27.$$

A keresett esély kb. 0,27.

b) Jelölje A azt az eseményt, hogy az árut A-tól rendelték, H pedig azt az eseményt, hogy egy héten belül megérkezett. Ekkor:

$$P(A \mid H) = \frac{P(AH)}{P(H)} = \frac{0{,}8 \cdot 2x}{3x} : \frac{0{,}8 \cdot 2x + 0{,}6x}{3x} = \frac{1{,}6}{2{,}2} \approx 0{,}73.$$

A keresett esély kb. 0,73.

c)

$$M = 0{,}27 \cdot 800 \cdot 0{,}9 + (1 - 0{,}27) \cdot 800 = 778{,}4.$$

Vagyis várhatóan kb. 778 Ft-ot fizetnek érte.

8. *Egy* y *tengellyel párhuzamos tengelyű parabola csúcspontja a* $T(1;4)$ *pont, a parabola* 2 *abszcisszájú pontjába húzható érintő iránytangense* 6. *Határozzuk meg az* y *tengely, a parabolaív és a parabola* 2 *abszcisszájú pontjához húzható érintő által bezárt síkidom területét.* (*16 pont*)

Megoldás. A parabola egyenletének meghatározása:

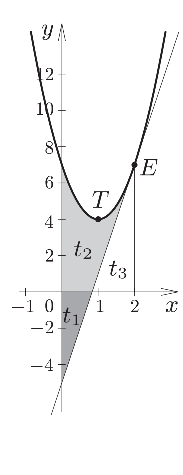
$$y = a(x-1)^2 + 4 = ax^2 - 2ax + a + 4,$$

$y' = 2ax - 2a$, innen $6 = y'(2) = 2a$, és így $a = 3$.

A parabola egyenlete $y = 3x^2 - 6x + 7$. Az érintő egyenlete az $E(2;7)$ pontban $y = 6x - 5$, $t = t_1 + t_2 - t_3$, ahol a t_2a parabola alatti terület a $[0;2]$-ban, t_1 és t_3 pedig egy-egy háromszög területe.

$$\begin{aligned} t &= \frac{\frac{5}{6} \cdot 5}{2} + \int\limits_0^2 (3x^2 - 6x + 7)\,dx - \frac{7\left(2 - \frac{5}{6}\right)}{2} = \\ &= \frac{25}{12} + \left[x^3 - 3x^2 + 7x\right]_0^2 - \frac{49}{12} = \\ &= \frac{25}{12} + (8 - 12 + 14) - \frac{49}{12} = 8. \end{aligned}$$

Vagyis a kérdéses terület 8 területegység.



9. *Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(1;2)$ ponton, és az $x-y+5=0$, valamint az $x-y=2$ egyenesek közé eső szakasza 5 egység.* *(16 pont)*

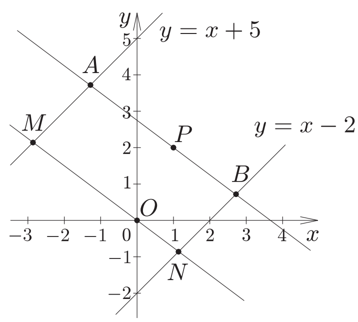
Megoldás. Legyen a feltételnek megfelelő egyenes az AB. Toljuk el párhuzamosan az origóba, legyen ez az MN egyenes, ennek egyenlete $y=mx$.

Az $y=mx$ és $y=x+5$ egyenesek metszéspontja: $M\left(\frac{5}{m-1};\frac{5m}{m-1}\right)$.

Az $y=mx$ és $y=x-2$ egyenesek metszéspontja: $N\left(\frac{-2}{m-1};\frac{-2m}{m-1}\right)$.

A feltétel szerint $MN=5$, ezért

$$MN^2=25=\left(\frac{7}{m-1}\right)^2+\left(\frac{7m}{m-1}\right)^2.$$



Rendezés után a $12m^2+25m+12=0$ egyenletet kapjuk. Ennek megoldásai: $m=-\frac{3}{4}$; $m=-\frac{4}{3}$. Az ilyen meredekségű, és a $P(1;2)$ ponton átmenő egyenesek egyenlete: $4x+3y=10$, illetve $3x+4y=11$.