

Emelt szintű gyakorló feladatsor

I. rész

1. Amikor Jancsi célba ért a mezei futóversenyen, akkor a helyszíni riporter megkérdezte tőle, hogy hányadik helyen végzett. Jancsi így válaszolt: „Ha az előttem végzők fele mögöttem végzett volna, akkor mögöttem ötször annyian lettek volna, mint előttem. Ha viszont a mögöttem befutók harmada előttem végzett volna, akkor 6-tal többen végeztek volna előttem, mint mögöttem.”

Hány résztvevője volt a futóversenynek és hányadik helyen végzett Jancsi?

(12 pont)

2. Egy szabályos hatszög alakú rét egyik oldalának felezőpontjába szúrt karóhoz kikötöttünk egy kecskét. Hány százalékát legelheti le a kecske a rétnak, ha feszes kötél esetén pont el tud jutni a két szomszédos oldal távolabbi végpontjába?

(12 pont)

3. Legyen az A halmaz az első n pozitív egész számot tartalmazó halmaz. Legyen az A halmaz a 3-mal osztható, a B halmaz a 4-gyel osztható, a C halmaz pedig az 5-tel osztható számok halmaza.

a) Véletlenszerűen kiválasztva egy számot, mekkora annak a valószínűsége, hogy az a megadott három halmaz egyikének sem eleme, ha $n = 100$?

b) Ha az $A \cap B \cap C$ halmaznak 2 eleme van, akkor hány eleme lehet az $(A \cap B) \setminus C$ halmaznak?

(13 pont)

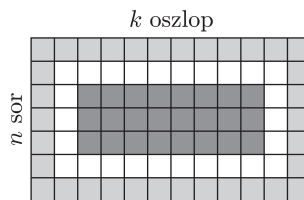
4. A MÁV statisztikai adatai szerint az utazók 8%-a bliccel (azaz érvényes jegy nélkül utazik).

a) Egy vagonban 24 utas tartózkodik. Mekkora annak az esélye, hogy a jegyellenőr talál bliccelőt a vagonban?

b) Hány utas esetén lesz legalább 90% annak az esélye, hogy a jegyellenőr talál bliccelőt a vagonban? (14 pont)

II. rész

5. Egy egységnyi négyzetekből álló négyzetrács n sorból és k oszlopból áll.



A négyzetrács szélével érintkező négyzetek száma (az *ábrán* világosszürke), a négyzetrács szélével érintkező négyzetekkel érintkező négyzetek száma (az *ábrán* fehér), és a négyzetrács belsejében levő négyzetek száma (az *ábrán* sötétszürke) egy számtani sorozat egymást követő tagjai. Határozzuk meg n és k értékét. (16 pont)

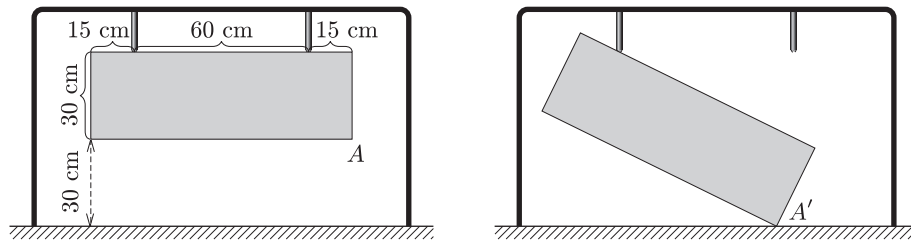
6. Milyen pozitív egész n -re teljesül, hogy a $\frac{3\sqrt{n} + \sqrt{3}}{4\sqrt{3} - \sqrt{n}}$ tört értéke pozitív egész szám? (16 pont)

7. A Budapest–Zürich nemzetközi gyorsvonat szerelvénye 12 vagonból áll: 4 db 1. osztályú, 6 db 2. osztályú vagon, valamint egy étkezőkocsi és egy poggyászkocsi.

a) Hányféleképpen alakulhat a kocsik sorrendje oly módon, hogy az 1. osztályú kocsik is és a 2. osztályú kocsik is egymás mögött legyenek, és az étkezőkocsi ne legyen a szerelvény utolsó vagonja?

b) Az egyik vagonban 8 tudós utazott, akik közül néhányan már ismerték egymást. Az egyik tudós (legyen a neve A) mindenkit ismert a társaságból. Három olyan tudós volt közöttük, akik A -n kívül senki mászt nem ismertek, míg a többi négy ismerte egymást. Kézfogással bemutatkozott azok, akik nem ismerték egymást. Hány kézfogás történt? (16 pont)

8. Egy étterem bejárata előtt, vízszintes talajon egy fémkeretre függőleges rudakat hegesztettek, majd a rudakra csavarozott táblán hirdették a napi menüt. Egy idő után az egyik csapággy eltört (lásd *ábra*), és így a tábla a földre billent.



- a) Határozzuk meg a tábla A csúcspontjának billenés utáni A' helyzetét a földön.
 b) Hány fokkal fordult el a tábla a billenés következtében?

(16 pont)

9. Egy egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja körül olyan félkört rajzoltunk, mely érinti a háromszög oldalait. Mekkora a háromszög szögei, ha a félkör területe a háromszög területének a lehető legnagyobb százalékát teszi ki?

(16 pont)