A 2011. évi Kürschák József Matematikai Tanulóverseny feladatainak megoldása

1. *Adott pozitív egészeknek egy $a_1, a_2, \ldots$ végtelen sorozata, amelyre teljesül, hogy tetszőleges k, ℓ pozitív egészek esetén $a_{k+\ell}$ osztható az a_k és a_ℓ számok legnagyobb közös osztójával. Mutassuk meg, hogy bármely $1 \le k \le n$ esetén $a_n a_{n-1} \cdots a_{n-k+1}$ osztható $a_k a_{k-1} \cdots a_1$-gyel.*

Megoldás. A binomiális együtthatók mintájára legyen

$$B(n,0) = 1, \quad \text{és} \quad B(n,k) = \frac{a_n a_{n-1} \cdot \ldots \cdot a_{n-k+1}}{a_k a_{k-1} \cdot \ldots \cdot a_1}, \quad \text{ha} \quad 1 \le k \le n.$$

Az n szerinti indukcióval bizonyítjuk, hogy $B(n,k)$ egész szám.

A $k=0$ és $k=n$ esetekben az állításunk triviális, hisz $B(n,0) = B(n,n) = 1$. Ez a megfigyelés egyúttal az $n=1$ esetet is bizonyítja. Tegyük fel tehát, hogy $0 < k < n$, és $B(n',k') \in \mathbb{Z}$ teljesül minden $1 \le k' \le n' < n$ értékre.

Az (1) definícióból láthatjuk, hogy

$$B(n,k) = \frac{a_n}{a_k} \cdot B(n-1,k-1) = \frac{a_n}{a_{n-k}} \cdot B(n-1,k).$$

A feladat feltétele szerint az a_n szám osztható a_k és a_{n-k} legnagyobb közös osztójával. Ezért vannak olyan x, y egész számok, amelyekre $a_k x + a_{n-k} y = a_n$. Ezt beírva (2)-be,

$$\begin{aligned} B(n,k) &= \frac{a_k x + a_{n-k} y}{a_n} \cdot B(n,k) = x \cdot \frac{a_k}{a_n} B(n,k) + y \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n} B(n,k) = \\ &= x \cdot B(n-1,k-1) + y \cdot B(n-1,k). \end{aligned}$$

Az indukciós feltevés szerint a jobb oldalon álló számok egészek, így $B(n,k)$ is egész. $\square$

Megjegyzések. 1. Az $1, 2, 3, \ldots$ sorozatra triviálisan fennáll a kívánt feltétel. A feladat erre a konkrét sorozatra éppen a a binomiális együtthatók egész tulajdonságát állítja. A kitűzött feladat tehát arra mutat rá, hogy a szorzatok hányadosának egész tulajdonsága már egy, az $a_1, a_2, \ldots$ sorozatról kikötött jóval gyengébb feltételből is következik.

2. Több versenyző próbálkozott annak becslésével, hogy egy p prím milyen kitevőn osztja a számlálót, illetve a nevezőt. Nem nagyon nehéz megmutatni, hogy tetszőleges q prímhatványnak legalább annyi többszöröse van az $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_{n-k+1}$ számok között, mint az $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \cdots a_k$ számok között. Ebből a megfigyelésből pedig könnyen adódik a feladat megoldása.

2. *Legyen n pozitív egész. Jelölje $a(n)$ az olyan $n = x_1 + x_2 + \ldots$ felbontások számát, ahol $x_1 \le x_2 \le \ldots$ és a sorozat minden x_i tagjára $x_i + 1$ a 2 pozitív egész kitevős hatványa. Jelölje $b(n)$ az olyan $n = y_1 + y_2 + \ldots$ felbontások számát, ahol minden y_i tag pozitív egész és az utolsó kivételével minden y_i-re $2 \cdot y_i \le y_{i+1}$ teljesül. Igazoljuk, hogy $a(n) = b(n)$.*

Megoldás. Tetszőleges olyan $n = x_1 + x_2 + \ldots$ felbontást, amit az $a(n)$-ben számolunk meg, kódoljunk az alábbi módszerrel. Minden i-re írjuk fel az x_i kettes számrendszerbeli alakját (az i-edik sorba x_i-t írva) úgy, hogy a legnagyobb helyiértéken álló számjegyek egymás alá kerüljenek. Mivel a $2^k - 1$ szám kettes számrendszerbeli alakja pontosan k db egyesből áll, a kapott felírásban kizárólag egyesek fognak szerepelni, és az egyesekből álló sorok hossza lefelé haladva nem csökken. Ebben a felírásban minden egyeshez egy jól meghatározott *érték* tartozik: ha egy egyestől jobbra ℓ további egyes található, akkor az adott egyes értéke pontosan 2^ℓ. A felírásból adódóan a kódolásból úgy olvasható ki az x_i, hogy az i-edik sorban álló egyesek értékét összeadjuk.

Ha a most felírt kódolásban oszloponként adjuk össze a felírt egyesek értékét, akkor egy $n = y_1 + y_2 + \ldots$ felbontást kapunk, ahol y_i jelöli a jobbról az i-edik oszlopban álló egyesek összértékét. Világos, hogy $y_{i+1} \ge 2 \cdot y_i$, hiszen y_i minden egyesétől balra áll egy y_{i+1}-hez tartozó egyes, ami pontosan kétszer annyit ér, mint a tőle jobbra álló. Ez azt jelenti, hogy az $n = y_1 + y_2 + \ldots$ felbontást $b(n)$-ben számoltuk meg. Azt kaptuk, hogy minden $a(n)$-ben leszámolt felbontáshoz tartozik egy jól meghatározott $b(n)$-ben leszámolt felbontás.

A továbbiakban azt igazoljuk, hogy a fenti transzformáció kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés a kétféle típusba tartozó felbontások között. Ezt pedig úgy mutatjuk meg, hogy minden $b(n)$-ben leszámolt $n = y_1 + y_2 + \ldots$ felbontáshoz konstruálunk egy $a(n)$-ben leszámolt $n = x_1 + x_2 + \ldots$ felbontást, amit a fenti transzformáció pontosan az $n = y_1 + y_2 + \ldots$ felbontásba visz.

Legyen tehát adott egy $b(n)$-ben leszámolt $n = y_1 + y_2 + \ldots$ felbontás. A jobb szélső oszlopban helyezzünk el y_1 db egyest egymás felett. Ha már elkészítettünk i oszlopot, akkor ezektől balra úgy konstruáljuk meg az $(i+1)$-edik oszlopot, hogy az i-edik oszlop minden egyese mellé balról írunk egy egyest, továbbá még $y_{i+1} - 2 \cdot y_i$ további egyest írunk ezen egyesek fölé. Ez $y_{i+1} \ge 2 \cdot y_i$ miatt mindig megtehető. Világos, hogy ha most minden egyesnek a fent definiált értéket adjuk, akkor a j-edik oszlopbeli egyesek összértéke pontosan y_i lesz minden értelmes i-re. Ha pedig a felírt egyeseket soronként olvassuk ki kettes számrendszerbeli számokként, akkor ezen számok az n-nek egy $a(n)$-ben leszámolt $x_1 + x_2 + \ldots$ felbontását adják, amit (a konstrukció miatt) a fent leírt transzformáció pontosan az $n = y_1 + y_2 + \ldots$ felbontásba visz. Mi pedig éppen ezt akartuk bizonyítani. $\square$

Megjegyzés. A megoldás rámutat arra is, hogyan keletkezett a feladat. A jól ismert Ferrers-diagram konjugálásának mintájára teremtünk bijekciót a kétféle partíciótípus között azzal a különbséggel, hogy míg a Ferrers-diagramban minden jel értéke 1, ez a feladatban egy kettőhatvány, ami a diagramból egyértelműen kikövetkeztethető. Ha tehát Ferrers-diagramként (azaz „egyes számrendszerben") értelmezzük az

$$\begin{array}{l} 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1 \\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

reprezentációt, akkor az a $14 = 1+3+3+7$ partíciót jelenti, aminek konjugáltja a

$$14 = 1+1+1+1+3+3+4.$$

Ugyanez a diagram a feladatbeli kódolás szerint az $a(n)$-ben leszámolt $142 = 1+7+7+127$ partíciót kódolja, amihez a $b(n)$-ben leszámolt

$$142 = 1+2+4+8+18+36+73$$

partíció tartozik.

3. *Adott a síkon $2n$ pont és $3n$ egyenes. Bizonyítsuk be, hogy van a síkon olyan P pont, hogy P-nek a $3n$ egyenestől való távolságainak összege kisebb, mint P-nek a $2n$ ponttól való távolságainak összege.*

Megjegyzés. A megoldáshoz vezető alábbi ötletre sokan rájöttek. Ha igaz az állítás, akkor annak úgy is teljesülnie kell, ha az adott egyenesek mindegyike ugyanazon az O ponton halad át, és ugyanez a metszéspont van $2n$ multiplicitással megadva. Ha ekkor egy O-tól különböző P pont rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, akkor az OP félegyenes bármely pontja ilyen tulajdonságú. Márpedig, ha „kellően messziről" nézünk rá a síkra, akkor az egyenesek és a pontok „nagyon közel" lesznek ehhez az állapothoz. Az utolsó ötlet pedig az, hogy ha nagyon sok egyenes van adva, és azok egy szabályos $6n$ oldalú sokszög átmérői, akkor P-nek az egyenesektől mért össztávolsága „nagyjából" arányos lesz az OP távolsággal. Tehát ha az állítás igaz, akkor annak már egy véletlenül választott P pontra is pozitív valószínűséggel kell teljesülnie. Ezeket a gondolatokat bontjuk ki az alábbi megoldásban.

Megoldás. Válasszunk egy olyan k kört a síkon, amiből a $3n$ egyenes mindegyike olyan húrt metsz ki, amihez legalább $\left(1-\dfrac{1}{10n}\right)\pi$ nagyságú középponti szög tartozik. Könnyen látható, hogy létezik ilyen kör: válasszuk a k kör O középpontját tetszőlegesen, sugara pedig

$$r = d \cdot \cos\left(\left(\frac{10n-1}{20n}\right)\pi\right)$$

legyen, ahol d az adott egyeneseknek az O-tól mért távolságai közül a legnagyobb.

Ha H egy, a k körbe írt szabályos hatszög és e a megadott egyenesek egyike, akkor azt mondjuk, hogy *H jó e-hez,* ha H-nak $3-3$ csúcsa esik e mindkét partjára, azaz e a H két átellenes oldalát metszi. A k választása folytán az olyan szabályos hatszögek csúcsai, amik nem jók e-hez a k körnek hat ívét alkotják, és mindegyik ívhez legfeljebb $\dfrac{\pi}{10n}$ nagyságú középponti szög tartozik. Mivel $6 \cdot 3n$ ilyen ív nem fedheti a k kört, ezért található olyan k-ba írt $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ szabályos hatszög, ami a megadott $3n$ egyenes mindegyikéhez jó. Sőt, még az is feltehető, hogy a $3n$ egyenes egyike sem merőleges a $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ hatszög egyetlen oldalára sem.

Azt állítjuk, hogy a P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 pontok valamelyike rendelkezik a feladatban leírt tulajdonsággal. Ehhez elegendő megmutatni, hogy e hat pontnak a $2n$ megadott ponttól vett távolságösszege több, mint a $3n$ egyenestől vett távolságösszege, hiszen ekkor nem lehetséges hogy mindegyik P_i-nek a pontoktól mért távolságösszege legalább akkora legyen, mint az egyenesektől való. Legyen tehát X a megadott pontok valamelyike. A háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$|\overline{P_1X}| + |\overline{P_4X}| \geq |\overline{P_1P_4}| = 2r,$$

hisz P_1 és P_4 az r sugarú k kör átellenes pontjai. Hasonló okból

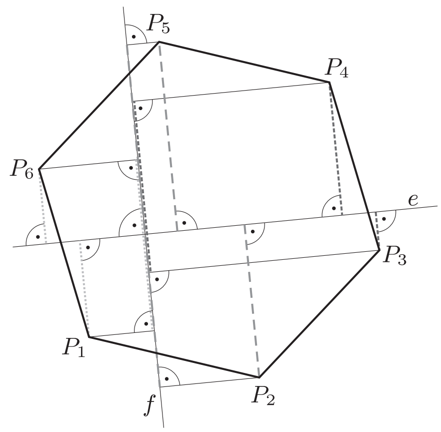
$$|\overline{P_2X}| + |\overline{P_5X}| \geq |\overline{P_2P_5}| = 2r \quad \text{és} \quad |\overline{P_3X}| + |\overline{P_6X}| \geq |\overline{P_3P_6}| = 2r,$$

tehát

$$|\overline{P_1X}| + |\overline{P_2X}| + |\overline{P_3X}| + |\overline{P_4X}| + |\overline{P_5X}| + |\overline{P_6X}| \geq 6r.$$

A megadott pontok mindegyikére összeadva a fenti becslést azt kapjuk, a P_i pontoknak a $2n$ megadott ponttól vett távolságösszege legalább $12rn$. A bizonyítás befejezéséhez az alábbiakban azt igazoljuk, hogy a P_i pontoknak az egyenesektől mért távolságösszege kisebb $12rn$-nél.

Legyen e a megadott $3n$ egyenes valamelyike. Feltehetjük, hogy e a P_1P_6 és P_3P_4 oldalakat metszi, azaz e egyik partján a P_1, P_2 és P_3, míg a másikon a P_4, P_5 és P_6 pontok vannak. Világos, hogy a P_1 és P_6 pontoknak az e egyenestől mért távolságainak összege megegyezik a $\overline{P_1P_6}$ szakasznak egy e-re merőleges f egyenesre vett merőleges vetületének hosszával.



Hasonlóan, a P_2 és P_5, illetve a P_3 és P_4 pontok e-től mért távolságösszege a $\overline{P_2P_5}$, illetve a $\overline{P_3P_4}$ szakaszok f-re vett merőleges vetületének hossza. Márpedig a merőleges vetület hossza sosem nagyobb a vetített szakaszénál, jelen esetben pedig szigorúan kisebb annál, ugyanis a hatszöget úgy választottuk, hogy P_1P_6 nem merőleges e-re. Tehát a kérdéses távolságösszeg szigorúan kisebb, mint e három szakasz összhossza, azaz $|\overline{P_1P_6}| + |\overline{P_2P_5}| + |\overline{P_3P_4}| = r + 2r + r = 4r$, hiszen a szabályos hatszög oldalhossza megegyezik a köré írt kör sugarával, míg az átellenes csúcsokat összekötő húr a k kör átmérője.

Azt kaptuk, hogy a P_i-knek a megadott $3n$ egyenestől a távolságösszege kisebb, mint $3n \cdot 4r = 12rn$. Nekünk pedig pontosan ezt kellett bizonyítanunk. $\square$

Megjegyzés. A feladatbelinél erősebb állítás is igaz. Ha nem csak egy szabályos hatszög csúcsaival dolgozunk, hanem egy megfelelően nagy k körön egyenletes eloszlással választott véletlen pontra számítjuk ki a kérdéses távolságösszegek várható értékeit (ehhez a k kör mentén kell integrálni), akkor az is könnyen igazolható, hogy tetszőleges n pont és k egyenes esetén, ahol $k < \frac{\pi}{2} \cdot n$, mindig létezik olyan P pont a síkon, hogy P-nek a pontoktól vett távolságösszege legalább akkora, mint P-nek az egyenesektől mért távolságainak összege.