

Megoldásvázlatok a 2012/3. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. A gyógyszerárakban a meghűlésre kapható, forró vízben feloldható port egyforma kis zacskókban hatosával és tízesével kartondobozokban árusítják. A hatos dobozok ára 1130 Ft, a tízeseké 1640 Ft. Mivel a dobozok anyagköltsége csak minimálisan tér el, ezért azt feltételezzük, hogy ezek ára a méretüktől függetlenül ugyanannyi, és a port tartalmazó zacskók árát is azonosnak gondoljuk. Mennyibe kerülne ekkor egy tizennégyes kiszerelésű doboz? (11 pont)

Megoldás. Legyen egy zacskó ára x Ft, egy doboz ára y Ft. A szöveg alapján felírhatjuk a következő egyenlet-rendszert:

$$\begin{cases} 6x + y = 1130, \\ 10x + y = 1640. \end{cases}$$

A második egyenletből kivonjuk az elsőt:

$$4x = 510, \quad x = 127,5.$$

Visszahelyettesítéssel kapjuk: $y = 365$. Vagyis egy zacskó 127,5 Ft-ba, egy doboz pedig 365 Ft-ba kerül a feltételezéseink alapján. Ekkor a tizennégyes kiszerelésű doboz ára: $14x + y = 14 \cdot 127,5 + 365 = 2150$.

Vagyis 2150 Ft-ba kerülne a tizennégyes kiszerelésű doboz.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet:

$$\lg(1-x) \cdot \sqrt{x^2 - 3x - 28} \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0. \quad (13 \text{ pont})$$

Megoldás. A logaritmus miatt: $x \in]-\infty; 1]$, a négyzetgyök miatt: $x^2 - 3x - 28 \geq 0$, azaz $x \in]-\infty; -4] \cup [7; \infty[$. Vagyis a feladat értelmezési tartománya: $x \in]-\infty; -4]$.

A tényezők zérushelyeit külön-külön megvizsgáljuk. Az első tényező zérushelye a 0, de ez nincs benne az értelmezési tartományban. A második tényező zérushelyei a -4 és a 7 , de a feladat értelmezési tartományának csak a -4 felel meg. A harmadik tényező zérushelyei:

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \text{ egész szám}), \quad \text{ahonnan: } x = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

A feladat értelmezési tartománya miatt azonban:

$$\frac{\pi}{3} + k\pi \leq -4, \quad k \leq \frac{-4 - \frac{\pi}{3}}{\pi} \approx -1,607 < -2.$$

A megoldás: $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{\pi}{3} + k\pi$, ahol $k < -2$ egész szám.

3. Bettina megvásárolta a legújabb mozaik púdert. A mellékelt kép mutatja a 4 cm-es sugarú henger alakú téglét felülnézetben.

a) A minta közepén látható ötszög szabályos, és az ezekhez kapcsolódó ötszögekkel ismét egy nagyobb szabályos ötszög alakul ki. Hogyan aránylana egymáshoz ennek a két szabályos ötszögnek az oldala, ha a téglében látható 16 síkidom területe egyenlő nagyságú lenne?

b) Adjuk meg az előző feltételek teljesülése mellett a közepén látható kis, szabályos ötszög oldalának hosszát milliméter pontossággal.

(13 pont)



Megoldás. a) Mivel a kis síkidomok területe egyenlő, ezért a két szabályos ötszög területének aránya: $\frac{1}{6}$. Tudjuk, hogy a területek a hasonlóság arányának négyzetével arányosak. Legyen a kis ötszög oldalának hossza a' , a nagy ötszög oldalának hossza pedig a . Ekkor:

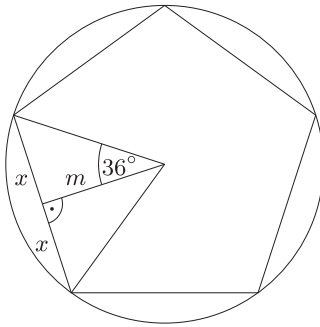
$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{1}{6}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{a'}{a} = \sqrt{\frac{1}{6}} \approx 0,4082.$$

b) A kör területe: $t_{\text{kör}} = 4^2 \cdot \pi = 16\pi$. Mivel a mozaik púder mintája 16 egyenlő területű síkidomból áll, ezért a körben látható szabályos ötszög területe: $t = \pi$. A feladatunk ezek alapján a π területű szabályos ötszög oldalhosszának meghatározása.

A szabályos ötszöget a középpontjából öt 72° -os szárszögű egyenlőszárú háromszögre bonthatjuk. Ennek az alapja legyen $2x$, ekkor az alaphoz tartozó magasság $m = \frac{x}{\text{tg } 36^\circ}$. Ezekkel felírjuk a területet:

$$x \cdot \frac{x}{\text{tg } 36^\circ} = \frac{\pi}{5}, \quad \text{amiből:} \quad 2x = \sqrt{\frac{4}{5} \cdot \pi \cdot \text{tg } 36^\circ} \approx 1,4.$$

Vagyis a kis, szabályos ötszög oldalának hossza kb. 1,4 cm.



4. Oldjuk meg a

$$2 \sin^2 2x - 2 \cos^2 x = 1$$

egyenletet.

(14 pont)

Megoldás. Az ismert azonosságok segítségével alakítsuk az egyenletet:

$$2(2 \sin x \cos x)^2 - 2 \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x,$$

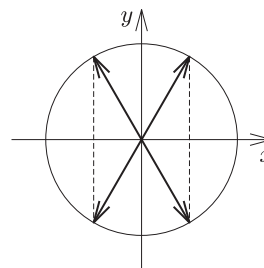
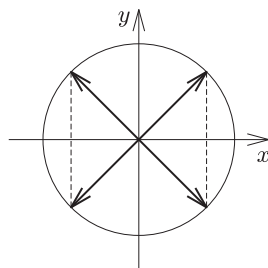
$$8 \sin^2 x \cos^2 x - 3 \cos^2 x - \sin^2 x = 0,$$

$$8(1 - \cos^2 x) \cos^2 x - 3 \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 0,$$

$$8 \cos^4 x - 6 \cos^2 x + 1 = 0,$$

$$(\cos^2 x)_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{16} = \frac{6 \pm 2}{16}, \quad (\cos^2 x)_1 = \frac{1}{2}, \quad (\cos^2 x)_2 = \frac{1}{4},$$

$$\text{Vagyis: } (\cos x)_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (\cos x)_{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (\cos x)_{21} = \frac{1}{2}, \quad (\cos x)_{22} = -\frac{1}{2}.$$



A megoldások összevonva:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k_1 \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \text{ahol } k_1 \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = \frac{3\pi}{4} + k_2 \cdot \pi, \quad \text{ahol } k_2 \in \mathbb{Z},$$

$$x_3 = \frac{2\pi}{3} + k_3 \cdot \pi, \quad \text{ahol } k_3 \in \mathbb{Z}.$$

II. rész

5. Az $y = x^2 - 4x + 8$ egyenletű parabolához a 0 és a 4 abszcisszájú pontjában is érintőt húzunk.

a) Mekkora a két érintő hajlásszöge?

b) Mekkora a két érintő és a parabola által meghatározott síkidom területe?

(16 pont)

$$\begin{cases} y & = \\ -4x + 8, & \\ y & = \\ 4x + 8. & \end{cases}$$

egyenletrendszer megoldásával kapjuk. A metszéspont: $C(2; 0)$.

A két érintő hajlásszöge az $ACB \sphericalangle$. Az ABC egyenlőszárú háromszög szárszögét kell meghatároznunk. Az ACF derékszögű háromszögben (F az AB felezőpontja) a C -nél lévő szög nyilvánvalóan a keresett szög fele. Erre a φ szögre felírható a derékszögű háromszögben a tangens: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{8}$, azaz $\varphi \approx 14,036^\circ$.

A két érintő hajlásszöge: $2\varphi \approx 28,1^\circ$.

b) A keresett T területet megkapjuk, ha a $[0; 4]$ -on a parabola alatti t területből elvesszük a $[0; 2]$ -on az e_1 érintő alatti t_1 , és a $[2; 4]$ -on az e_2 érintő alatti t_2 területet. Az adatok alapján:

$$t_1 = t_2 = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8.$$

A parabola alatti területet integrál segítségével határozzuk meg:

$$t = \int_0^4 (x^2 - 4x + 8) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 8x \right]_0^4 = \frac{4^3}{3} - 4 \cdot \frac{4^2}{2} + 8 \cdot 4 = \frac{64}{3}.$$

A keresett terület: $T = t - (t_1 + t_2) = \frac{64}{3} - 16 = \frac{16}{3}$.

6. Egy szivattyú óránként $4,8 \text{ m}^3$ vizet tud kiemelni a kútból. A vizet henger alakú medencébe eresztik, melynek teteje 154 m^2 -es körlap. Ez a körlap fedi a medence 12 cm -es vastagságú oldalfalát is.

a) Hány centimétert emelkedik $2,5$ óra alatt a víz a medencében?

b) A 15 perc alatt kiemelt vízmennyiséget 25 literes és 60 literes edényekbe töltik. Melyik edényből hány darab lehetett, ha pontosan megteltek ezzel a vízmennyiséggel?

(16 pont)

Megoldás. a) A fedőlap területe segítségével meghatározható a henger alakú medence R sugarának hossza: $154 = R^2 \cdot \pi$, amiből $R = \sqrt{\frac{154}{\pi}} \approx 7,00$ (m). Mivel az oldalfal 12 cm -es vastagságú, ezért a henger belső sugara: $r = 6,88$ m.

$2,5$ óra alatt $2,5 \cdot 4,8 = 12 \text{ m}^3$ vizet emel ki a szivattyú. Ennek a vízmennyiségnek legyen m a magassága a henger alakú medencében. A térfogatot felírva a következő összefüggést kapjuk:

$$12 = 6,88^2 \cdot \pi \cdot m, \quad \text{vagyis} \quad m = \frac{12}{6,88^2 \cdot \pi} \approx 0,081.$$

Mindössze $8,1 \text{ cm}$ -t emelkedik a medencében a vízszint $2,5$ óra elteltével.

b) Mivel óránként $4,8 \text{ m}^3$ vizet tudunk kiszivattyúzni, ezért 15 perc alatt ennek negyedét, azaz 1200 litert. Legyen a 25 literes edények száma x , a 60 litereseké pedig y . Ekkor:

$$\begin{aligned} 25x + 60y &= 1200, \\ 5x + 12y &= 240, \\ x &= \frac{240 - 12y}{5} = 48 - \frac{12}{5}y. \end{aligned}$$

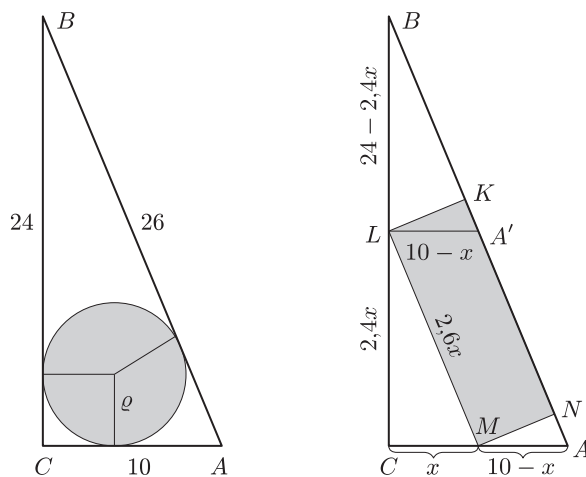
Mivel x , y darabszámot jelent, így y csak olyan 5 -tel osztható természetes szám lehet, ami mellett x is természetes szám.

A lehetséges értékpárokot táblázatba rendeztük:

y	0	5	10	15	20
x	48	36	24	12	0

7. Egy téglalap alakú telek két szomszédos oldalán az egyik csúcstól 10 méterre, illetve 24 méterre kijelölünk egy-egy pontot. A pontokat összekötő vonallal levágott derékszögű háromszögbe szeretnénk egy medencét építeni. Az egyik terv szerint a legnagyobb kör alakút, a másik terv szerint a legnagyobb, egy teljes oldalával a derékszögű háromszög átfogójához csatlakozó téglalap alakú medencét kellene megépíteni. Melyik esetben és mennyivel lenne nagyobb a vízfelület? (16 pont)

Megoldás. Az ábra a két tervről készített vázlatot mutatja.



Az első esetben a háromszög beírt köréről van szó. Pitagorasz-tétellel kapjuk a harmadik oldal hosszát: $c = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$. A háromszög területe a két befogóval meghatározható: $t = \frac{10 \cdot 24}{2} = 120$. Alkalmazhatjuk a terület felírására a $t = \rho \cdot s$ képletet is, ahol ρ a beírt kör sugarának a hossza, az s pedig a háromszög kerületének a fele. Vagyis

$$s = \frac{10 + 24 + 26}{2} = 30, \quad \text{így} \quad \rho = \frac{t}{s} = \frac{120}{30} = 4.$$

A kör alakú medence esetén a vízfelület nagysága: $t_{\text{kör}} = 4^2 \cdot \pi \approx 50,3 \text{ (m}^2\text{)}$.

A második terv esetén a maximális területű $KLMN$ téglalapot keressük. Az ábra jelöléseinek felhasználásával írjuk fel a keresett területet x függvényében. (Az ábrán látható, hogy $CM = x$.)

$$\begin{aligned} T(x) &= T_{ABC} - T_{MLC} - T_{LBK} - T_{AMN} = T_{ABC} - T_{MLC} - T_{A'BL} = \\ &= \frac{10 \cdot 24}{2} - \frac{x \cdot 2,4x}{2} - \frac{(10 - x)(24 - 2,4x)}{2} = \\ &= 120 - (120 - 12x - 12x + 1,2x^2) - 1,2x^2 = -2,4x(x - 10). \end{aligned}$$

A kapott másodfokú függvény hozzárendelésében a másodfokú tag együtthatója negatív, a két zérushelye pedig 0 és 10, így $x = 5$ -nél maximuma van. Ekkor

$$T(5) = -2,4 \cdot 5 \cdot (5 - 10) = 60.$$

Vagyis a téglalap alakú medence esetén a vízfelület nagysága 60 m^2 .

Ebben az esetben kb. $9,7 \text{ m}^2$ -rel nagyobb vízfelületet kapunk, mint a kör alakú terv kivitelezése esetén.

8. Egy hatszög három csúcsának koordinátája valamilyen sorrendben a következő: $(-1; -1)$; $(2; 8)$; $(7; 3)$. Határozzuk meg a hiányzó csúcsok koordinátáit, ha tudjuk, hogy az ismeretlen pontok mindegyike az adott három csúccsal húrtrapézát alkot. (16 pont)

Megoldás. Az adott pontok: $A(-1; -1)$; $B(2; 8)$; $C(7; 3)$. A feladat szövegéből következik, hogy a keresett pontok illeszkednek az ABC háromszög köré írt körére. Először ennek a körnek írjuk fel az egyenletét:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Mivel erre a körre illeszkedik az A , B és C csúcs is, így felírható a következő egyenletrendszer:

$$\begin{cases} 1 + 1 - a - b + c = 0, \\ 4 + 64 + 2a + 8b + c = 0, \\ 49 + 9 + 7a + 3b + c = 0, \end{cases} \quad \text{azaz} \quad \begin{cases} -a - b + c = -2, \\ 2a + 8b + c = -68, \\ 7a + 3b + c = -58. \end{cases}$$

A c kiküszöbölésével kapjuk:

$$\begin{cases} 3a + 9b = -66, \\ 8a + 4b = -56, \end{cases} \text{ amiből } \begin{cases} 2a + 6b = -44, \\ 2a + b = -14, \end{cases}, \text{ azaz: } b = -6, a = -4, c = -12.$$

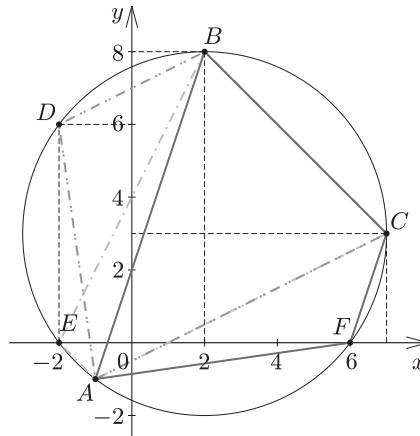
A keresett k kör egyenlete: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$.

Az A, B, C pontokhoz háromféleképpen tudunk negyediket elhelyezni, hogy húrtrapézot határozzanak meg. Ezeket D -vel, E -vel, F -fel jelöljük.

I. eset: A D pont rajta van a B pontra illeszkedő AC -vel párhuzamos e egyenesen (és természetesen a k körön is). Az e egy irányvektora $\vec{AC}(8; 4)$, így egy normálvektora: $\vec{n}_e(1; -2)$. Az e egyenes egyenlete: $x - 2y = -14$.

A k és az e egyenlete által kapott egyenletrendszer egyik megoldása természetesen a B pont, a másik megoldás a keresett $D(-2; 6)$ pont koordinátáját adja.

II. eset: Az E pont rajta van az A pontra illeszkedő BC -vel párhuzamos f egyenesen (és természetesen a k körön is). Az f egy irányvektora $\vec{BC}(5; -5)$, így egy normálvektora: $\vec{n}_f(1; 1)$. Az f egyenes egyenlete: $x + y = -2$.



A k és az e egyenlete által kapott egyenletrendszer egyik megoldása természetesen az A pont, a másik megoldás a keresett $E(-2; 0)$ pont koordinátáját adja.

III. eset: Az F pont rajta van a C pontra illeszkedő AB -vel párhuzamos g egyenesen (és természetesen a k körön is). A g egy irányvektora $\vec{AB}(3; 9)$, így egy normálvektora: $\vec{n}_g(3; -1)$. A g egyenes egyenlete: $3x - y = 18$.

A k és az e egyenlete által kapott egyenletrendszer egyik megoldása természetesen a C pont, a másik megoldás a keresett $F(6; 0)$ pont koordinátáját adja.

Ezzel a hatszög mind a hat csúcsának koordinátáját megadtuk.

9. Legyen

$$A = \frac{6n^2 - 15n - 9}{4n^2 - 18n - 10}.$$

a) Mennyi a $\lim_{n \rightarrow \infty} A$ határérték?

b) Adjuk meg azokat az n egész számokat, amelyek esetén az A is egész szám.

c) Oldjuk meg az $A = 3$ egyenletet.

(16 pont)

Megoldás. a) Alkalmazzuk a megfelelő átalakításokat és használjuk a határértékre vonatkozó tételeket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 - 15n - 9}{2n^2 - 9n - 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{15}{n} - \frac{9}{n^2}}{2 - \frac{9}{n} - \frac{5}{n^2}} = \frac{6 - 0 - 0}{2 - 0 - 0} = 3.$$

b) A számláló és a nevező zérushelyeinek megkeresése után írjuk szorzatalakban a másodfokú kifejezéseket.

A $6n^2 - 15n - 9 = 0$ gyökei: $n_1 = 3, n_2 = -\frac{1}{2}$.

A $2n^2 - 9n - 5 = 0$ gyökei: $n_3 = 5, n_4 = -\frac{1}{2}$.

Most már az is látható, hogy n értéke nem lehet 5, és nem lehet $-\frac{1}{2}$, mert ekkor a nevező értéke nulla lenne.

Írjuk fel a szorzatalakokat és végezzük el az egyszerűsítéseket:

$$A = \frac{6n^2 - 15n - 9}{4n^2 - 18n - 10} = \frac{6(n-3)(n+\frac{1}{2})}{2(n-5)(n+\frac{1}{2})} = \frac{3(n-3)}{n-5}.$$

A kapott törtet alakítsuk a következő módon:

$$A = \frac{3(n-3)}{n-5} = \frac{3n-9}{n-5} = \frac{3(n-5)+6}{n-5} = 3 + \frac{6}{n-5}.$$

Ez akkor lesz egész, ha $n-5$ osztója a 6-nak. A következő lehetőségeket kapjuk:

$n-5$	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
n	-1	2	3	4	6	7	8	11
A	2	1	0	-3	9	6	5	4

A táblázat második sorában láthatók a megfelelő n értékek.

c) $A = \frac{6n^2 - 15n - 9}{2n^2 - 9n - 5} = 6$ egyenlet bal oldalán álló kifejezés a szorzattá bontások után egyszerűsíthető. Ekkor a következő egyenletet kapjuk:

$$\frac{3(n-3)}{n-5} = 6, \quad \iff \quad 3n-9 = 6(n-5) = 6n-30, \quad \iff \quad n=7.$$

Ez valóban megoldása az egyenletnek.

Megjegyzés. Ha egyszerűsítés nélkül szorzunk a $2n^2 - 9n - 5$ nevezővel, akkor egy másodfokú egyenletet kapunk. Ennek két gyöke a 7, illetve a $-\frac{1}{2}$. Természetesen az értelmezési tartomány miatt csak a 7 lesz a megoldás.

Számadó László