Gimnáziumi matematika órákon sokan találkozhatnak a következő, vagy ehhez hasonló példákkal. A feladat rendszerint a „függvények, függvényábrázolások” témakör kapcsán kerül terítékre, hiszen grafikus megoldása kézenfekvő. Azonban ha hagyjuk, e feladat messze kivezet bennünket a grafikus egyenletmegoldás témaköréből.

Feladat: *Oldjuk meg az*

$$\Big|\Big|\big|\big||x|-2^3\big|-2^2\big|-2\Big|-1\Big|=$$
$$=\Bigg|\Bigg|\dots||x|-1|-1|-1|-1|-1|-1|-1|-1|-1\Big|-1\Big|-1\Big|-1\Bigg|-1\Bigg|-1\Bigg|-1\Bigg|$$

egyenletet.

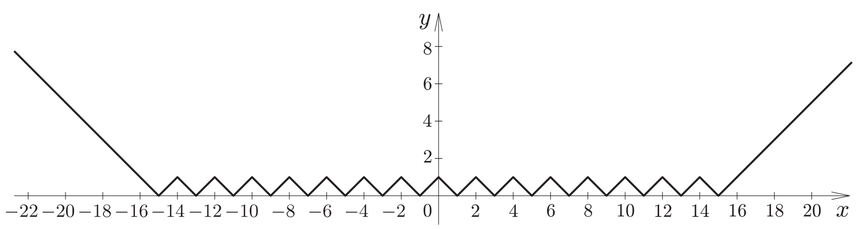
A megoldás grafikus úton egyszerű: Legyen

$$f(x):=\Big|\Big|\big|\big||x|-2^3\big|-2^2\big|-2\Big|-1\Big|$$

és

$$g(x):=\Bigg|\Bigg|\dots||x|-1|-1|-1|-1|-1|-1|-1|-1|-1\Big|-1\Big|-1\Big|-1\Bigg|-1\Bigg|-1\Bigg|-1\Bigg|.$$

Ekkor $f(x)$-et és $g(x)$-et koordinátarendszerben ábrázolva ugyanazt a függvényképet kapjuk, tehát $f(x)=g(x)$ minden x-re (*1. ábra*).



1. ábra. $f(x)$ és $g(x)$ közös képe

A feladatban szereplő függvények grafikonját nézve felmerül a kérdés: Vajon igaz-e minden n-re, hogy

$$f(x)=\Big|\Big|\big|\dots\big|\big||x|-2^n\big|-2^{n-1}\big|-\dots\big|-2\Big|-1\Big| \quad \text{és} \tag{1}$$

$$g(x)=\big|\big|\dots\big|\big||x|\underbrace{-1|-1\big|-\dots\big|-1\big|}_{(2^{n+1}-1 \text{ db 1-es})} \tag{2}$$

ugyanaz a függvény, és e függvény grafikonja is csak egyes „fogakból” áll? A következőkben ezekre a kérdésekre keresünk választ.

Legyenek tehát $f(x)$ és $g(x)$ az (1) és (2) képletek alapján megadott függvények. A továbbiakhoz először elevenítsük fel, hogyan bontunk fel (értékelünk ki) egy abszolút értékes kifejezést. Legyen $a,b\ge 0$ egész. $|a+b|=a+b$, és ha $a-b\ge 0$, akkor $|a-b|=a-b$, azonban ha $a-b<0$, akkor $|a-b|=-a+b$.

1. $f(x)=g(x)$ bizonyítása. Vizsgáljuk a függvényértékeket először $|x|>2^{n+1}$-re. A feltétel miatt az abszolút érték felbontás szabályai alapján

$$\begin{aligned}f(x)&=\big||x|-2^n-2^{n-1}-\dots-2-1\big|=|x|-2^n-2^{n-1}-\dots-2-1=\\&=|x|-(2^{n+1}-1),\end{aligned}$$

hiszen 2^0-tól 2^n-ig a 2-hatványok összege $2^{n+1}-1$, $|x|$ pedig ennél nagyobb. Ugyanígy

$$g(x)=||x|-1-1-\dots-1-1|=|x|-(2^{n+1}-1),$$

tehát ekkor valóban $f(x)=g(x)$.

Most vizsgáljuk $|x|\le 2^{n+1}$-re: ez már kicsit hosszabb lesz. Először azt mutatjuk meg, hogy ilyenkor $f(x)\le 1$ és $g(x)\le 1$, majd azt, hogy ebből következően tényleg egyenlőek. A bizonyítás első részében vegyük ismét az abszolút érték felbontás nélküli alakokat. Tekintsük külön, először $f(x)$-et, majd $g(x)$-et, azt szeretnénk belátni, hogy

$$f(x)=\Big|\Big|\big|\dots\big|\big||x|-2^n\big|-2^{n-1}\big|-\dots\big|-2\Big|-1\Big|\le 1.$$

Bizonyítsunk teljes indukcióval. $i=n$-re az állítás teljesül: $||x|-2^n|\le 2^n$, mert $|x|\le 2^{n+1}$. Indukciós feltétel: ha $i=k$-ra

$$\big|\big|\dots\big|\big||x|-2^n\big|-2^{n-1}\big|-\dots\big|-2^{k+1}\big|\le 2^{k+1}, \tag{3}$$

akkor

$$\left|\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|-2^n\right|-2^{n-1}\right|-\ldots\right|-2^{k+1}\right|-2^k\right|\le 2^k \quad (\text{ahol } 0\le k\le n).$$

Bizonyítás. $\left|\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|-2^n\right|-2^{n-1}\right|-\ldots\right|-2^{k+1}\right|-2^k\right|$ maximális akkor lehet, ha

$$\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|-2^n\right|-2^{n-1}\right|-\ldots\right|-2^{k+1}\right|-2^k \tag{4}$$

minimális, vagy maximális.

Mivel a (3) indukciós feltétel teljesül, és felveszi a 2^{k+1} értéket (pl. $x=2^{n+1}$-re), azért ha (4) maximális, akkor

$$\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|-2^n\right|-2^{n-1}\right|-\ldots\right|-2^{k+1}\right|-2^k=2^{k+1}-2^k=2^k,$$

ha pedig (4) minimális, akkor

$$\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|-2^n\right|-2^{n-1}\right|-\ldots\right|-2^{k+1}\right|-2^k=0-2^k=-2^k.$$

Így

$$\left|\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|-2^n\right|-2^{n-1}\right|-\ldots\right|-2^{k+1}\right|-2^k\right|\le 2^k.$$

Az előzőek miatt $f(x)\le 2^0=1$ teljesül a vizsgált intervallumban.

Bizonyítsuk ugyanezt $g(x)$-re. Nézzük végig azt a folyamatot, ahogy $g(x)$ készül. Vesszük x abszolút értékét, majd levonunk 1-et és vesszük annak az abszolút értékét. Ezután ismét levonunk 1-et, és abszolút értéket képzünk, … stb. Állítsuk meg ezt a folyamatot ott, ahol

$$\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|\underbrace{-1\right|-1\right|-\ldots\right|-1}_{k\text{ db egyes}}\right|=1 \quad (0\le k\le 2^{n+1}-1).$$

Ilyen helyzet biztosan előáll valamikor, hiszen $|x|\le 2^{n+1}$, és $2^{n+1}-1$ darab 1-est vonunk le összesen. Ha ekkor még nem vagyunk $g(x)$ képzésének végén, akkor az abszolút értékek alakulása:

$$\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|\underbrace{-1\right|-1\right|-\ldots\right|-1}_{k+1\text{ db egyes}}\right|=0,$$

$$\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|\underbrace{-1\right|-1\right|-\ldots\right|-1}_{k+2\text{ db egyes}}\right|=1,$$

$$\left|\left|\ldots\left|\left|\left|x\right|\underbrace{-1\right|-1\right|-\ldots\right|-1}_{k+3\text{ db egyes}}\right|=0,\ldots \text{ stb.}$$

Látható, hogy innentől $g(x)$ nem lesz nagyobb 1-nél. Azonban, mint láttuk, $g(x)$ képzése közben egyszer biztosan eléri az 1 értéket, tehát $g(x)\le 1$.

Beláttuk, hogy $|x|\le 2^{n+1}$ esetben $f(x)\le 1$ és $g(x)\le 1$. Elérkeztünk a bizonyítás második részéhez. Szeretnénk az előbbiek felhasználásával megmutatni, hogy $f(x)=g(x)$. A könnyebb átláthatóság kedvéért alakítsuk át az $f(x)$ és $g(x)$ függvényeket. A szabályok szerint bontsuk fel $f(x)$-ben és $g(x)$-ben az abszolút érték jeleket, kivéve x-ét és az utolsót:

$$f(x)=\left|\left|x\right|\pm 2^n\pm 2^{n-1}\pm\ldots\pm 2\pm 1\right| \quad \text{és} \tag{1'}$$

$$g(x)=\left|\left|x\right|\pm 1\pm 1\pm\ldots\pm 1\pm 1\right|, \tag{2'}$$

ahol a $\pm$ előjel $+$, vagy $-$ úgy, ahogy a felbontás műveletét végezzük.

Tekintsük $f(x)$-nek az $(1')$ szerint felbontott alakját. Jelölje $A(x)$ az $|x|$-hez hozzáadott és kivont számok összegét, azaz

$$A(x)=\pm 2^n\pm 2^{n-1}\pm\ldots\pm 2\pm 1,$$

ahol az egyes tagok előjelei az abszolút érték felbontások esetén alakulnak, tehát $|x|$ nagyságától függenek. Ekkor tehát $f(x)=\left|\left|x\right|-A(x)\right|$. Az $A(x)$ páratlan szám, hiszen 2-hatványok összege és különbsége ± 1 $(=\pm 2^0)$.

Ugyanígy tekintsük $g(x)$-nek a $(2')$ szerint felbontott alakját. Jelölje $B(x)$ az $|x|$-hez hozzáadott és kivont számok összegét, vagyis

$$B(x)=\pm 1\pm 1\pm\ldots\pm 1\pm 1,$$

ahol az egyes tagok előjelei az abszolút érték felbontások esetén alakulnak, tehát $|x|$ nagyságától függenek. Ekkor tehát $g(x)=\left|\left|x\right|-B(x)\right|$. $B(x)$ is páratlan szám, hiszen $2^{n+1}-1$ darab, azaz páratlan darab egyes összege vagy különbsége.

Így $f(x)$-et és $g(x)$-et egyszerűbb alakra hoztuk, használjuk ezt tovább. Most $|x|$-et alakítjuk át úgy, hogy a bizonyítás szemléletes legyen: írjuk át $[|x|]+\{|x|\}$ alakba (ahol $[|x|]$ az $|x|$ egész részét, $\{|x|\}$ az $|x|$ törtrészét jelenti). Így

$$f(x)=\left|\left|x\right|-A(x)\right|=\left|[|x|]+\{|x|\}-A(x)\right|$$

és

$$g(x) = ||x| - B(x)| = |[|x|] + \{|x|\} - B(x)|\,.$$

Bontsuk fel a legkülső abszolút érték jeleket $f(x)$-ben és $g(x)$-ben is. Ezt kétszer két esetre bontjuk $f(x)$ és $g(x)$ esetében is, attól függően, hogy $[|x|] + \{|x|\} - A(x)$ nemnegatív, vagy negatív, és attól függően, hogy $\{|x|\} = 0$, vagy $\{|x|\} \neq 0$.

(1) Ha $[|x|] + \{|x|\} - A(x) \geq 0$, akkor $f(x) = \big|\,[|x|] + \{|x|\} - A(x)\big| \leq 1$ miatt $0 \leq [|x|] + \{|x|\} - A(x) \leq 1$. Ekkor tehát $0 - \{|x|\} \leq [|x|] - A(x) \leq 1 - \{|x|\}$.

(*a*) Ha $\{|x|\} = 0$, akkor $0 \leq [|x|] - A(x) \leq 1$. $[|x|]$ és $A(x)$ egész számok, ezért $[|x|] - A(x)$ is egész, ebből következik, hogy $[|x|] - A(x) = 0$ vagy 1. Mivel $A(x)$ páratlan, azért

$$[|x|] - A(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| \text{ páratlan,} \\ 1, & \text{ha } |x| \text{ páros.} \end{cases}$$

Így $f(x) = 0$, ha $|x|$ páratlan, és $f(x) = 1$, ha $|x|$ páros.

(*b*) Ha $\{|x|\} \neq 0$, akkor $0 - \{|x|\} \leq [|x|] - A(x) \leq 1 - \{|x|\}$. Itt $[|x|]$ és $A(x)$ egész számok, ezért $[|x|] - A(x)$ is egész, ebből következik, hogy $[|x|] - A(x) = 0$. Így

$$f(x) = \big|\,[|x|] + \{|x|\} - A(x)\big| = \big|0 + \{|x|\}\,\big| = \{|x|\}\,.$$

(2) Ha $[|x|] + \{|x|\} - A(x) < 0$, akkor $f(x) = \big|\,[|x|] + \{|x|\} - A(x)\big| \leq 1$ miatt $0 < A(x) - [|x|] - \{|x|\} \leq 1$. Ekkor tehát $\{|x|\} < A(x) - [|x|] \leq 1 + \{|x|\}$.

(*a*) Ha $\{|x|\} = 0$, akkor $0 < A(x) - [|x|] \leq 1$. Az $[|x|]$ és $A(x)$ egész számok, ezért $A(x) - [|x|]$ is egész, ebből következik, hogy $A(x) - [|x|] = 1$. Így $f(x) = 1$.

(*b*) Ha $\{|x|\} \neq 0$, akkor $\{|x|\} < A(x) - [|x|] \leq 1 + \{|x|\}$. Az $[|x|]$ és $A(x)$ egész számok, ezért $A(x) - [|x|]$ is egész, ebből következik, hogy $A(x) - [|x|] = 1$. Így

$$f(x) = \big|\,[|x|] + \{|x|\} - A(x)\big| = A(x) - [|x|] - \{|x|\} = 1 - \{|x|\}\,.$$

Hasonlóan

(1) Ha $[|x|] + \{|x|\} - B(x) \geq 0$, akkor $g(x) = \big|\,[|x|] + \{|x|\} - B(x)\big| \leq 1$ miatt $0 \leq [|x|] + \{|x|\} - B(x) \leq 1$, ekkor tehát $0 - \{|x|\} \leq [|x|] - B(x) \leq 1 - \{|x|\}$.

(*a*) Ha $\{|x|\} = 0$, akkor $0 \leq [|x|] - B(x) \leq 1$. $[|x|]$ és $B(x)$ egész számok, ezért $[|x|] - B(x)$ is egész, ebből következik, hogy $[|x|] - B(x) = 0$, vagy 1.
Mivel $B(x)$ páratlan, azért $[|x|] - B(x) = 0$, ha $|x|$ páratlan, és $[|x|] - B(x) = 1$, ha $|x|$ páros. Így $g(x) = 0$, ha $|x|$ páratlan, és $g(x) = 1$, ha $|x|$ páros.

(*b*) Ha $\{|x|\} \neq 0$, akkor $0 - \{|x|\} \leq [|x|] - B(x) \leq 1 - \{|x|\}$. $[|x|]$ és $B(x)$ egész számok, ezért $[|x|] - B(x)$ is egész, ebből következik, hogy $[|x|] - B(x) = 0$. Így

$$g(x) = \big|\,[|x|] + \{|x|\} - B(x)\big| = \big|0 + \{|x|\}\,\big| = \{|x|\}\,.$$

(2) Ha $[|x|] + \{|x|\} - B(x) < 0$, akkor $g(x) = \big|\,[|x|] + \{|x|\} - B(x)\big| \leq 1$ miatt $0 < B(x) - [|x|] - \{|x|\} \leq 1$. Ekkor tehát $\{|x|\} < B(x) - [|x|] \leq 1 + \{|x|\}$.

(*a*) Ha $\{|x|\} = 0$, akkor $0 < B(x) - [|x|] \leq 1$. $[|x|]$ és $B(x)$ egész számok, ezért $B(x) - [|x|]$ is egész, ebből következik, hogy $B(x) - [|x|] = 1$; így $g(x) = 1$.

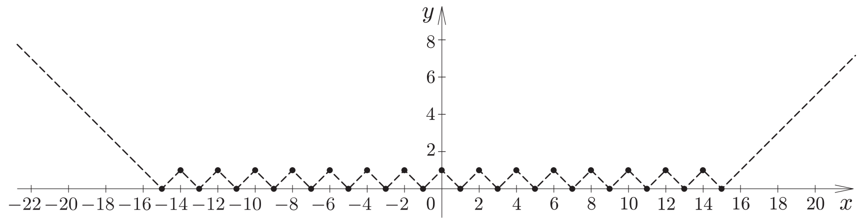
(*b*) Ha $\{|x|\} \neq 0$, akkor $\{|x|\} \leq B(x) - [|x|] \leq 1 + \{|x|\}$. $[|x|]$ és $B(x)$ egész számok, ezért $B(x) - [|x|]$ is egész, ebből következik, hogy $B(x) - [|x|] = 1$. Így

$$g(x) = \big|\,[|x|] + \{|x|\} - B(x)\big| = B(x) - [|x|] - \{|x|\} = 1 - \{|x|\}\,.$$

Az (1*a*), (1*b*), (2*a*), (2*b*) esetek eredményeit $f(x)$-re és $g(x)$-re megnézve látjuk, hogy minden esetben $f(x) = g(x)$. (Mindegyik eset bizonyításakor felhasználtuk az előző eredményt, miszerint $f(x) \leq 1$ és $g(x) \leq 1$.)

2. A továbbiakban azt mutatjuk meg, hogy ha $|x| < 2^{n+1} - 1$, akkor $f(x)$ és $g(x)$ grafikonja egyes „fogakból" áll.

Az előbbi esetszétválasztásnál láttuk, hogy ha $|x|$ egész és páros, akkor $f(x) = g(x) = 1$, ha $|x|$ egész és páratlan, akkor $f(x) = g(x) = 0$. Ezeket a pontokat, vagyis az egész értékeknek megfelelőket ennek alapján már ábrázolhatjuk (*2. ábra*).



2. ábra

E pontokat csak az előbb részeredményekként kapott $1 - \{|x|\}$ vagy $\{|x|\}$ függvények grafikonrészletei „köthetik össze”. Mivel ha $|x|$ egész, akkor felváltva páros, vagy páratlan, így az $1 - \{|x|\}$ és $\{|x|\}$ függvények grafikonrészletei is felváltva jelennek meg, hiszen két szomszédos pontot egyféleképpen köthetünk össze ezen grafikonrészletek segítségével, egymáshoz viszonyított helyzetük szerint. Tehát $f(x) = g(x)$ egyes fogakból áll.

3. Most, hogy minden $k(x) = \Big|\Big|\Big|\ldots\Big|||x| - 2^n| - 2^{n-1}\Big| - \ldots\Big| - 2\Big| - 1\Big|$ függvényre láttuk, hogy a görbéje hogyan néz ki, további általánosítás lehetősége jelenik meg.

Mi a feltétele annak, hogy egy $h(x) = ||\ldots|||x| - a_n| - a_{n-1}| - \ldots| - a_0|$ alakú függvény (ahol az a_i számok pozitív egészek) grafikonja csak egyes fogakból álljon? Megmutatjuk, hogy ennek szükséges és elégséges feltétele az, hogy minden $0 \le m \le n$-re

$$a_m - 1 \le \sum_{i=0}^{m-1} a_i, \quad \text{azaz} \quad a_m - \sum_{i=0}^{m-1} a_i \le 1$$

teljesüljön. A bizonyítást ismét kétfelé bontjuk aszerint, hogy $|x| > \sum_{i=0}^{n} a_i$ vagy $|x| \le \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Az első esetben könnyen láthatjuk, hogy $h(x) = |x| - \sum_{i=0}^{n} a_i$.

Tegyük föl ezután, hogy $|x| \le \sum_{i=0}^{n} a_i$. Az előző feladathoz hasonlóan itt is teljes indukcióval bizonyítunk, azonban az indukciós feltétel kicsit változik. Hogy lássuk, miért változik, először nézzük meg, hogyan alakul $h(x)$ maximális értéke: $||x| - a_n|$ akkor lehet maximális, ha $|x| - a_n$ a legnagyobb vagy a legkisebb.

Az $|x|$-re érvényes feltétel miatt nyilván $||x| - a_n|$ akkor maximális, ha $|x| = 0$, vagy ha $|x| = \sum_{i=0}^{n} a_i$. Amennyiben $|x| = 0$, akkor $||x| - a_n| = a_n$, ha pedig $|x| = \sum_{i=0}^{n} a_i$, akkor $||x| - a_n| = \sum_{i=0}^{n} a_i - a_n$. Tehát

$$0 \le ||x| - a_n| \le a_n, \quad \text{vagy} \quad 0 \le ||x| - a_n| \le \sum_{i=0}^{n} a_i - a_n.$$

Ugyanígy tovább:
Ha $||x| - a_n| - a_{n-1} < 0$, akkor $|||x| - a_n| - a_{n-1}| \le a_{n-1}$.
Ha $||x| - a_n| - a_{n-1} \ge 0$, akkor

ha $||x| - a_n| \le \sum_{i=0}^{n} a_i - a_n$, akkor

$$|||x| - a_n| - a_{n-1}| \le \sum_{i=0}^{n} a_i - a_n - a_{n-1},$$

ha $||x| - a_n| \le a_n$, akkor $|||x| - a_n| - a_{n-1}| \le a_n - a_{n-1}$.

Az indukciós lépés a következő lesz. Ha teljesül, hogy

$$\begin{aligned}
||\ldots|||x| - a_n| - a_{n-1}| - \ldots| - a_{k+1}| &\le a_{k+1}, \\
\text{vagy} \quad &\le a_{k+2} - a_{k+1}, \\
\text{vagy} \quad &\le a_{k+3} - a_{k+2} - a_{k+1}, \\
&\vdots \\
\text{vagy} \quad &\le \sum_{i=0}^{n} a_i - a_n - a_{n-1} - \ldots - a_{k+1},
\end{aligned}$$

akkor fennáll, hogy

$$\begin{aligned}||\ldots|||x|-a_n|-a_{n-1}|-\ldots|-a_k| &\le a_k,\\ \text{vagy} &\le a_{k+1}-a_k,\\ \text{vagy} &\le a_{k+2}-a_{k+1}-a_k,\\ &\ \vdots\\ \text{vagy} &\le \sum_{i=0}^{n} a_i-a_n-a_{n-1}-\ldots-a_k.\end{aligned}$$

Tehát $h(x)$-re teljesül, hogy

$$\begin{aligned}h(x) &\le a_0,\\ \text{vagy} &\le a_1-a_0,\\ \text{vagy} &\le a_2-a_1-a_0,\\ &\ \vdots\\ \text{vagy} &\le \sum_{i=0}^{n} a_i-a_n-a_{n-1}-\ldots-a_0.\end{aligned}$$

Ahhoz, hogy $h(x)\le 1$ igaz legyen, annak kell teljesülnie, hogy

$$\begin{aligned}h(x) &\le a_0\le 1,\\ \text{vagy} &\le a_1-a_0\le 1,\\ \text{vagy} &\le a_2-a_1-a_0\le 1,\\ &\ \vdots\\ \text{vagy} &\le \sum_{i=0}^{n} a_i-a_n-a_{n-1}-\ldots-a_0\le 1.\end{aligned}$$

Vagyis teljesülnie kell annak – és ez a feltétel egyben elégséges is – hogy

$$\begin{aligned}a_0&\le 1,\\ a_1-a_0&\le 1,\\ a_2-a_1-a_0&\le 1,\\ &\ \vdots\\ \sum_{i=0}^{n} a_i-a_n-a_{n-1}-\ldots-a_0&\le 1.\end{aligned}$$

Ez pedig éppen a korábban kimondott bizonyítandó feltétel, vagyis hogy

$$a_m-\sum_{i=0}^{m-1} a_i\le 1.$$

Tehát $h(x)$ valóban legfeljebb 1.

Ekkor $h(x)$-et $h(x)=|[|x|]+\{|x|\}-C(x)|$ alakba átírva a bizonyítás a második feladatban látottak szerint fejeződik be. Tehát ha $a_m-\sum_{i=0}^{m-1} a_i\le 1$ (ahol $0\le m\le n$) teljesül, akkor $h(x)$ csak egyes fogakból áll. Mi következik még ebből a feltételből? Nézzük $h(x)$ utolsó, nem nulla (a_0) tagját. Erre a feltétel szerint igaz, hogy $a_0\le 1$. Tehát $a_0=1$. Ekkor viszont $a_1\le 1+a_0=2$.

Ugyanígy, ha $a_k\le 1+a_{k-1}+a_{k-2}+\ldots+a_0$, ahol $a_i=2^i$ $(0\le i\le k-1)$, akkor $a_k\le 1+2^k-1=2^k$, vagyis $h(x)$ k-adik tagja nem lehet nagyobb 2^k-nál. Ebből látszik, hogy az első feladatban szereplő $f(x)$ függvény paraméterei a megengedett korlátozásokhoz képest a lehető leggyorsabban növekednek, hiszen ott minden k-ra $a_k=2^k$.

Befejezésül és az előbbiek alkalmazásaként egy, a kiindulási példához hasonló feladat:

Igazoljuk, hogy

$$\Big||\ldots|||x|-13|-8|-5|-3|-2|-1|-1\Big|=\Big||\ldots|||x|\underbrace{-1|-1|-\ldots|-1}_{33\text{ db 1-es}}\Big|.$$

Itt a paraméterek a Fibonacci-számok $\{f_k \mid f_0 = f_1 = 1,\ f_{m+1} = f_m + f_{m-1}\}$ sorozatának első hét eleme. Ismert, hogy $f_0 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{m-1} = f_{m+1} - f_1 = f_{m+1} - 1$, ezért minden m-re

$$f_m - \sum_{i=0}^{m-1} f_i = f_m - f_{m+1} + 1 = 1 - f_{m-1} \leq 1.$$

Tulassay Zsolt
Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn.
9. évf., mat. tagozat