Megoldásvázlatok a 2010/8. sz. emelt szintű gyakorló feladataihoz

I. rész

1. *Az* **iM** *bolygón az év ugyanúgy* 365 *napból áll, mint nálunk. A hónapok hossza szintén* 28, 30 *vagy* 31 *nap. Bizonyítsuk be, hogy akkor az évnek ott is* 12 *hónapból kell állnia.*

Mennyi a különböző hosszúságú hónapok száma ezen a bolygón, ha tudjuk, hogy ott több a 28 *napos hónap, mint nálunk?* (*11 pont*)

Megoldás. 11 hónapos nem lehet az év, mert akkor legfeljebb $11\cdot 31=341$ napból állna. 13 vagy több hónap esetén pedig legkevesebb $13\cdot 28=364$ napból állna egy év. Ekkor sem lehet 365 napos, mert ha egy 28 napos hónapot 30 naposra cserélünk, akkor már 366 napból áll egy év. Tehát 12 hónapos lehet ott is egy év. Megmutatjuk, hogy ez lehetséges is.

A 28 napos hónapok száma 3-nál több nem lehet, mert ekkor csak $3\cdot 28+9\cdot 31=363$ napos lenne egy év. Tehát a 28 napos hónapok száma $a=2$. Legyen b a 30, illetve c a 31 napos hónapok száma. Ekkor $30b+31c=365-2\cdot 28=309$ és $b+c=10$.

Az egyenletrendszer megoldása: $b=1$, $c=9$, vagyis az **iM** bolygón 2 db 28 napos, 1 db 30 napos és 9 db 31 napos hónapból áll egy év.

2. *Adjuk meg az összes olyan pozitív egész számot, melynek* 90 *pozitív osztója van és ezek közül legalább* 10 *egymást követő szám.* (*12 pont*)

Megoldás. 10 egymást követő egész szám között biztos van egy 9-cel, egy 8-cal, egy 7-tel és egy 5-tel osztható. Tehát a keresett szám $2^3\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7$-tel osztható, vagyis a prímtényezős felbontása: $2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\cdot p_1^{r_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{r_n}$, ahol $a\ge 3$, $b\ge 2$, $c,d\ge 1$ és p_i-k prímszámok, r_i-k pedig a megfelelő kitevők. E szám pozitív osztóinak száma:

$$(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(r_1+1)\cdot\ldots\cdot(r_n+1).$$

A 90-nek csak egy legalább 4 tényezős felbontása van, melyben minden tényező 1-nél nagyobb és más prímtényezője nincs, és ez az $5\cdot 3\cdot 3\cdot 2$.

Ebből következik, hogy $a=4$ és $b=2$. A 2, 3, 5, 7 prímeken kívül más prím nem szerepelhet a keresett szám prímtényezős felbontásában. Ezek alapján két lehetőség van: $2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7=25\,200$ vagy $2^4\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7^2=35\,280$.

Mindkettőnek 90 osztója van, köztük az egymást követő 1, 2, …, 10 is.

3. *Hány megoldása van az alábbi egyenletnek, ha x és y is pozitív,* 9*-nél kisebb valós szám?*

$$\log_x 64+\log_8 x^2=-4\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right).$$

(*14 pont*)

Megoldás. A feladat értelmezési tartománya: $0<x<9$, $x\ne 1$ és $0<y<9$. Alakítsuk az egyenletet:

$$2\log_x 8+2\log_8 x=-4\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right),\qquad \log_x 8+\log_8 x=-2\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right).$$

Egy 0-tól különböző valós szám és reciprokának összege áll a bal oldalon, melynek értékkészlete ezért az $\mathbb{R}\setminus\,]-2;2[$.

A jobb oldal értékkészlete $[-2;2]$. A két oldal csak -2 és 2 esetén lehet egyenlő.

I. eset: Ha mindkét oldal értéke 2, akkor $x=8$ és $\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=-1$, azaz

$$y+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi,\qquad k\in\mathbb{Z}$$

$$y=\frac{7\pi}{6}+2k\pi.$$

Csak a $\dfrac{7\pi}{6}$ esik a megfelelő intervallumba.

II. eset: Ha mindkét oldal értéke -2, akkor $x=\dfrac{1}{8}$ és $\sin\left(y+\frac{\pi}{3}\right)=1$, azaz

$$y+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\qquad l\in\mathbb{Z}$$

$$y=\frac{\pi}{6}+2l\pi.$$

A megfelelő intervallumba a $\dfrac{\pi}{6}$ és a $\dfrac{13\pi}{6}$ esik.

Az egyenletnek a megadott feltételek mellett 3 számpár megoldása van:

$$(x;y)=\left(8;\frac{7\pi}{6}\right);\ \left(\frac{1}{8};\frac{\pi}{6}\right);\ \left(\frac{1}{8};\frac{13\pi}{6}\right).$$

4. *Egy háromszög a, b, c oldalhosszai egész számok, és egyik magasságának hossza egyenlő a másik kettő összegével. Mutassuk meg, hogy ekkor az $a^2+b^2+c^2$ összeg négyzetszám.* *(14 pont)*

Megoldás. Legyen $m_c=m_a+m_b$. A háromszög területe t, ekkor $2t=am_a=bm_b=cm_c$. Ezek alapján

$$m_c=\frac{2t}{c}=m_a+m_b=\frac{2t}{a}+\frac{2t}{b},\quad \text{amiből}\quad \frac{1}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

azaz $ab-(bc+ac)=0$.

$$a^2+b^2+c^2=a^2+b^2+c^2+2\big[ab-(bc+ac)\big]=a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ac=(a+b-c)^2.$$

a, b és c egész számok, így $a+b-c$ is egész, tehát $a^2+b^2+c^2$ valóban négyzetszám.

II. rész

5. *Tizenhat pozitív valós szám összege* 100, *a négyzetösszegük* 1000. *Legfeljebb mekkora lehet a legnagyobb szám?* *(16 pont)*

Megoldás. Legyen $S=a_1+\ldots+a_{15}$, $Q=a_1^2+\ldots+a_{15}^2$. A számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenséget felírva:

$$\frac{S}{15}\le\sqrt{\frac{Q}{15}},\qquad S^2\le 15Q.$$

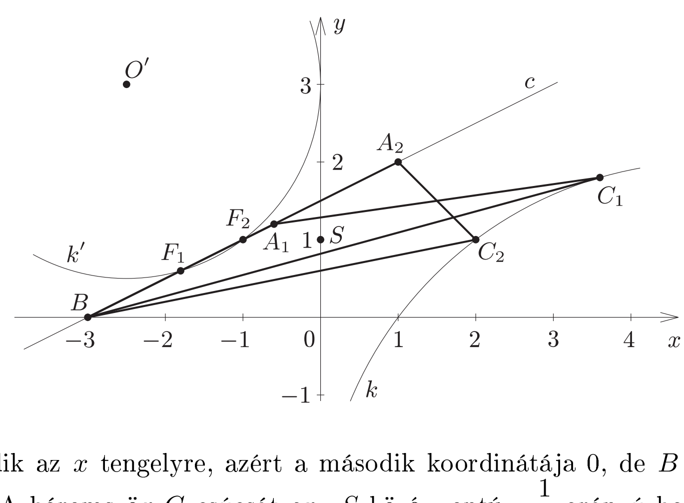
Tudjuk, hogy $100-a_{16}=S$ és $1000-a_{16}^2=Q$, $(100-a_{16})^2\le 15\big(1000-a_{16}^2\big)$, $16a_{16}^2-200a_{16}-5000\le 0$. Az egyenlőtlenség megoldása:

$$-\frac{25}{2}\le a_{16}\le 25.$$

Tehát a_{16} legfeljebb 25 lehet (ekkor a többi 15 szám mind 5).

6. *Adott egy háromszög $S(0;1)$ súlypontja és c oldalegyenesének egyenlete $x-2y=-3$. A c oldalegyenesre illeszkedő B csúcs az abszcissza tengelyen van. A C csúcsa a $k\colon (x-5)^2+(y+3)^2=25$ egyenletű körre illeszkedik. Határozzuk meg a háromszög csúcsainak koordinátáit.* *(16 pont)*

Megoldás. Készítsünk *ábrát.*



Mivel a B pont illeszkedik az x tengelyre, azért a második koordinátája 0, de B a $c\colon x-2y=-3$ egyenesre is illeszkedik, így $B(-3;0)$. A háromszög C csúcsát egy S középpontú $-\dfrac{1}{2}$ arányú hasonlóság viszi az AB szakasz F felezőpontjába. Az S középpontú $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ arányú hasonlóság a k kört k'-be viszi. A k kör középpontja: $O(5;-3)$, sugara: $r=5$. A k' kör középpontja $O'\left(-\dfrac{5}{2};3\right)$, sugara $r'=\dfrac{5}{2}$, mert

$$\overrightarrow{O'}=\overrightarrow{S}+\frac{1}{2}\overrightarrow{SO}=(0;1)+\frac{1}{2}(-5;4).$$

Ekkor

$$k'\colon\ \left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{4}.$$

Meghatározzuk k' és c közös pontját az F-et. A c egyenletéből kapjuk: $x=2y-3$. Ezt helyettesítve k' egyenletébe:

$$\left(2y-\frac{1}{2}\right)^2+(y-3)^2=\frac{25}{4},\qquad 5y^2-8y+3=0.$$

Két gyököt kapunk: $y_1=0{,}6$, ekkor $x_1=-1{,}8$; és $y_2=1$, ekkor $x_2=-1$.

Vagyis két F pont adódik: $F_1(-1{,}8;0{,}6)$, $F_2(-1;1)$. Ezekhez felhasználva, hogy F felezőpont és S harmadolópont, kiszámoljuk az A és a C koordinátáit is: $A_1(-0{,}6;1{,}2)$, $A_2(1;2)$, $C_1(3{,}6;1{,}8)$, $C_2(2;1)$.

Tehát két ilyen háromszög van, ezek csúcsainak koordinátái:

$$\begin{array}{lll} A_1\ (-0{,}6;1{,}2), & B_1\ (-3;0), & C_1\ (3{,}6;1,8),\\ A_2\ (1;2), & B_2\ (-3;0), & C_2\ (2;1). \end{array}$$

7. *Miből élnek a fapados légitársaságok? A Budapest–Róma út oda és vissza* 18 000 Ft. *Erre a járatra egy ügynökség* 35 *helyet kínál. Ezeket általában az interneten való megjelenés után azonnal lefoglalják és kifizetik. Általában a foglalások kb.* 20%*-át a repülés előtt lemondják. Az egyszerűség kedvéért számoljunk pontosan* 20%*-kal. Mivel akciós áron foglaltak az ügyfelek, lemondás esetén a befizetett összeget nem kapják vissza. Ilyenkor ezeket a helyeket „Last Minute” áron értékesíti a cég* 15 000 Ft*-ért. Ezért érdekes az ügynökség számára, hogy egy járaton mennyi lehet a lemondások számának esélye.*

a) Határozzuk meg annak a valószínűségét (a fent említett járat és ügynökség esetén), hogy a lemondások száma:

– pontosan 7*;*

– legfeljebb 5*;*

– legalább 6*.*

b) Számítsuk ki, hogy mennyi lehet az ügynökség várható bevétele ezen a járaton a lemondott helyek újraértékesítése után?

A lemondások újabb bevételhez juttatják az ügynökséget, ezért a tényleges 35 *helyett* 40 *helyet hirdetnek meg a járatra. Ha véletlenül* 35*-nél többen szeretnének utazni ezen a járaton (ezt hívják túlfoglalásnak), ekkor a létszám felettieknek gyorsan drágább jegyet kell vásárolnia az irodának* 24 000 Ft*-ért.*

c) Számítsuk ki, hogy az ügynökségnek egy járatra eredetileg eladott 40 *hely esetén mennyi bevétele lesz, ha*

– 10*-en lemondják az utazást;*

– mind a 40*-en utaznak.*

d) Mekkora a túlfoglalás valószínűsége? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Alkalmazzuk a binomiális valószínűségi eloszlást: $n=35$, $p=0{,}2$.

$$p(x=7)=\binom{35}{7}\cdot 0{,}2^7\cdot 0{,}8^{28}\approx 0{,}166,$$

$$p(x\le 5)=\sum_{k=0}^{5}\binom{35}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{35-k}\approx 0{,}272,$$

$$p(x\ge 6)=1-p(x\le 5)=0{,}728.$$

b) Az ügynökség $35\cdot 18\,000=630\,000$ Ft bevételhez jut. A lemondások várható értéke binomiális eloszlás esetén: $np=35\cdot 0{,}2=7$. Ezeket a jegyeket 15 000 Ft-os áron adva újabb $7\cdot 15\,000=105\,000$ Ft bevételhez jutnak.

Vagyis összesen 735 000 Ft-hoz juthat járatonként a cég.

c) Első esetben 5 jegyet tud még „Last Minute” áron eladni, így $40\cdot 18\,000+5\cdot 15\,000=795\,000$ Ft bevételhez jut.

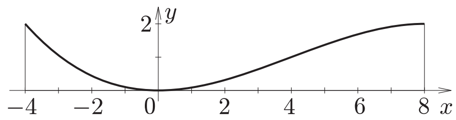
Második esetben a túlfoglalás miatt 5 jegyet még vásárolnia kell, így $40\cdot 18\,000-5\cdot 24\,000=600\,000$ Ft bevételhez jut.

d)
$$p=\sum_{k=0}^{4}\binom{40}{k}\cdot 0{,}2^k\cdot 0{,}8^{40-k}\approx 0{,}07591\approx 7{,}6\%.$$

8. *Egy* 12 *méter széles patakmeder keresztmetszetét egy adott helyen az*

$$f\colon[-4;8]\to\mathbb{R},\qquad x\mapsto -\frac{1}{128}x^3+\frac{3}{32}x^2$$

függvény grafikonja írja le.



a) Mutassuk meg, hogy a függvénynek az origóban lokális minimumhelye, az $x = 8$-ban pedig lokális maximumhelye van.

b) Mekkora lehet a patak legnagyobb vízállása, amikor még nem önt ki? Hány liter víz folyik át ilyenkor 1 *óra alatt a teljes keresztmetszeten, ha a patakban a víz folyásának sebessége* 2,5 m/s? *(16 pont)*

Megoldás. *a)* A deriváltak: $f'(x) = -\frac{3}{128}x^2 + \frac{3}{16}x$, $f''(x) = -\frac{3}{64}x + \frac{3}{16}$.

$$f'(x) = \frac{3x(8-x)}{128} = 0.$$

Az első derivált zérushelyei: 0 és 8

A második derivált 0-nál felvett értéke pozitív: $\frac{3}{16}$, tehát itt a függvény konvex, azaz $x = 0$-ban lokális minimumhelye van.

A második derivált 8-nál felvett értéke negatív: $-\frac{3}{16}$, tehát a függvény itt konkáv, azaz $x = 8$-ban lokális maximumhelye van.

b) az $f(x)$ folytonos a $[-4; 8]$-on.

Ha $-4 < x < 0$, szigorúan monoton csökken, mert $f'(x)$ negatív.

Ha $0 < x < 8$, szigorúan monoton nő, mert $f'(x)$ pozitív.

Mivel $f(-4) = 2$ és $f(8) = 2$, azért a patak legmagasabb vízállása 2 méter lehet.

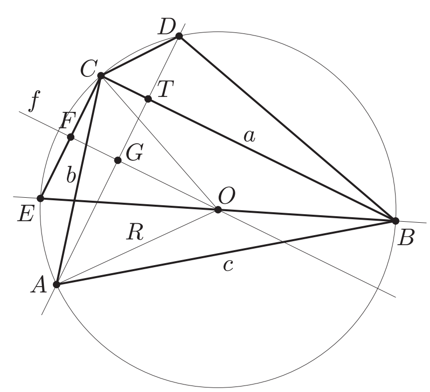
$$\int_{-4}^{8} \big(2 - f(x)\big)\,dx = \int_{-4}^{8} \left(2 + \frac{1}{128}x^3 - \frac{3}{32}x^2\right) dx = \left[2x + \frac{1}{512}x^4 - \frac{1}{32}x^3\right]_{-4}^{8} = 13{,}5.$$

A mederkeresztmetszet területe 13,5 m^2. 1 óra alatt a víz $3600 \cdot 2{,}5 = 9000$ méter utat tesz meg. Tehát az átfolyó vízmennyiség $9000 \cdot 13{,}5 = 121\,500$.

Vagyis ez 121 500 m^3, azaz 121 500 000 liter vizet jelent óránként.

9. *Egy hegyesszögű háromszög oldalainak hossza: $a = 20$, $b = 13$ és $c = 21$. A köré írható kör középpontja O. Az A csúcsból induló magasságvonalnak a köré írt körrel vett A-tól különböző metszéspontja D. A BO egyenes köré írt körrel vett B-től különböző metszéspontja E. Határozzuk meg a $BECD$ négyszög területét.* *(16 pont)*

Megoldás. A $BECD$ négyszöget BC átlója két háromszögre bontja. Ezek területének összegével határozzuk meg a négyszög területét.



A háromszög területe (R a körülírt kör sugara):

$$t = \frac{am}{2} = \frac{abc}{4R},$$

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} =$$
$$= \sqrt{27 \cdot 7 \cdot 14 \cdot 6} = 126,$$

ami alapján $m = \frac{63}{5}$, valamint $R = \frac{abc}{4t} = \frac{65}{6}$.

A Pitagorasz-tételt alkalmazva a BEC derékszögű háromszögre:

$$EC=\sqrt{\left(\frac{65}{3}\right)^2-20^2}=\sqrt{\frac{65^2-20^2\cdot 3^2}{3^2}}=\frac{25}{3}\,.$$

A BEC háromszög területe:

$$\frac{20\cdot\frac{25}{3}}{2}=\frac{250}{3}\,.$$

Húzzunk párhuzamost az O ponton keresztül a BC szakasszal, ez legyen f. Mivel $EC\perp BC$, azért $f\perp EC$. EOC háromszög egyenlőszárú ($EO=CO=R$), tehát f az EC felezőmerőlegese. Ugyanezért f az AD-nak is felezőmerőlegese. Az f egyenes az EC-t F-ben, AD-t G-ben metszi. A magasság talppontja: T.

Az $FCTG$ négyszög téglalap: $FC=GT=\dfrac{25}{6}$.

$$m-\frac{25}{6}=AG=GD=TD+\frac{25}{6}\,,$$

$$m-\frac{25}{3}=TD=\frac{63}{5}-\frac{25}{3}=\frac{64}{15}\,.$$

A BCD háromszög területe:

$$\frac{20\cdot\frac{64}{15}}{2}=\frac{128}{3}\,.$$

A $BECD$ négyszög területe egyenlő a BEC és a BCD háromszögek területének összegével:

$$T_{BECD}=\frac{250}{3}+\frac{128}{3}=\frac{378}{3}=126.$$

Megjegyzés: 1. Az ABC háromszög és $BECD$ négyszög területe egyenlő.

2. A feladat megoldható a koszinusz-, a Pitagorasz-tétel, és a szinuszos területképlet felhasználásával is.