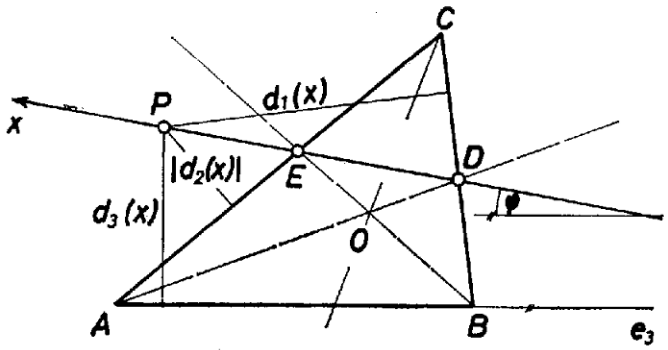
Mozgassunk egy P pontot a DE egyenesen, jellemezzük helyzetét a $DP = x$ előjeles szakasszal, amit E felé vegyünk pozitívnak. P-nek az $AB = e_3$ egyenestől való távolsága mint x függvénye

$$d_3(x) = d_3(0) + x \sin\varphi, \tag{1}$$

ahol φ a DE és BA egyenesek szöge, és $d_3(0)$ természetesen D-nek AB fölötti magassága. Könnyű belátni, hogy $d_3(DE) \lesseqqgtr d_3(0)$ aszerint, hogy $CA \lesseqqgtr CB$, és ha ezek nem egyenlők, akkor elég nagy abszolút értékű $x \lessgtr 0$ mellett $d_3(x)$ negatívnak adódik, mert P átlép e_3-on, ennek C-t és a háromszöget nem tartalmazó partjára. Ilyenkor feladatunkban természetesen $|d_3(x)|$-ét használjuk majd föl.



Válasszuk DE-t hosszegységnek, ekkor E-re $x = 1$, és kiküszöbölhetjük (1)-ből a szöget: $d_3(1) = d_3(0) + \sin\varphi$, tehát

$$d_3(x) = d_3(0) + x\big(d_3(1) - d_3(0)\big). \tag{2}$$

Látjuk, hogy $d_3(x)$ az x-nek elsőfokú függvénye. Nyilván ugyanez áll P-nek BC-től, CA-tól mért, ugyanígy értelmezett $d_1(x)$, illetve $d_2(x)$ távolságára. Ezekre D-ből $d_3(0) = d_2(0)$ és E révén $d_3(1) = d_1(1)$ – itt használtuk föl D és E szögfelezős származtatását –, továbbá $d_1(0) = 0$ és $d_2(1) = 0$, mert D, E rajta van BC-n, illetve AC-n.

Így $d_1(x)$-nek és $d_2(x)$-nek 2 – 2 helyen fölvett értékét ismertként kezelhetjük, és (2)-höz hasonlóan

$$d_1(x) = d_1(0) + x\big(d_1(1) - d(0)\big), \quad \text{azaz}$$
$$d_1(x) = x \cdot d_1(1),$$

és ugyanígy

$$d_2(x) = d_2(0) - x \cdot d_2(0).$$

Ezekből – az említett egyenlőségeket is fölhasználva – minden x-re:

$$d_1(x) + d_2(x) = d_2(0) + x(d_1(1) - d_2(0)) = d_3(0) + x(d_3(1) - d_3(0)) = d_3(x), \tag{3}$$

és ez tüstént az állítás igazolása P-nek minden olyan helyzetére, amelyre egyik $d_i(x)$ sem negatív ($i = 1, 2, 3$), és közülük $d_3(x)$ a legnagyobb. Van ilyen helyzete P-nek, a DE szakasz minden pontja ilyen, más szóval: amikor P a C-t tartalmazó DOE szögtartományban halad, beleértve az OD, OE félegyeneseket. Ugyanis ekkor P a háromszög belsejében van (illetve a kerületén), továbbá a síknak az AD szögfelezővel való kettévágása révén $d_3(x) \geqq d_2(x)$, és BE révén $d_3(x) \geq d_1(x)$.

Amint P átlép E-n, egyrészt $d_2(x)$ negatív lesz, mert átlépte az AC oldalegyenest, másrészt $d_1(x)$ nagyobb lesz, mint $d_3(x)$, mert a BE szögfelezőt is átlépte; továbbá $d_1(x) > |d_2(x)|$ is teljesül, mert ez a nagyságviszony a CO szögfelezőn átlépve fordul az ellentétesre, ezt pedig P már D és E közt átlépte. Ezek szerint $d_1(x)$ a három távolság legnagyobbika, $d_2(x) = -|d_2(x)|$ és (3)-ból $d_1(x) = d_3(x) + |d_2(x)|$, tehát az állítás ekkor is érvényes.

A legutóbbiakból úgy kapjuk az állítást a DE szakasz D-n túli meghosszabbításán levő P pontokra, hogy az 1-es és 2-es indexeket fölcseréljük egymással.

Bohus Géza (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. $CA = CB$ esetén az állítás elemi tükrözésekkel is könnyen belátható.