Az $f^{-1}(x) = f(x)$ típusú egyenletekről, avagy az írástudók felelőssége és egyéb érdekességek

Ábrahám Gábor

Az alábbi cikk a 2010. évi Rátz László Vándorgyűlésen elhangzott előadásom alapján készült.

Immár 18 éve tanítok a szegedi Radnóti Miklós Kísérleti Gimnázium matematika tagozatán. A tagozatunk fő feladata a tehetséggondozás, a matematika versenyekre történő felkészítés. Ennek nagyon fontos részét képezi, hogy olyan módszereket, ötleteket, fogásokat adjunk át a diákoknak, melyeket hatékonyan tudnak használni a munkájuk során. Ezeket mi is hosszú évek alatt sajátítottuk el sok tanulással, feladatmegoldással. A mi felelősségünk többek között abban áll, hogy az általunk közreadott megoldások precízek legyenek, a felhasznált tételeket pontosan fogalmazzuk meg, hogy azok alkalmazása nehogy hibás, vagy hiányos megoldásra vezessen. Ennek kapcsán szeretnék szólni az $f^{-1}(x) = f(x)$ típusú egyenletekről (ahol $f^{-1}(x)$ az $f(x)$ függvény inverze), melyekkel jó néhányszor találkozhattunk már matematika versenyeken.

Az első két feladat is versenyfeladat volt. Az itt közölt megoldásuk szó szerint az úgynevezett hivatalos megoldás. Ezekben kiemeltem azokat a részeket, melyekkel a cikk során részletesen foglalkozom.

1. feladat: *Oldjuk meg a valós számok halmazán a*

$$6\frac{x^2+1}{x^2+11} = \sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$$

egyenletet.

(KöMaL **F. 2830.**, NMMV 2003., KöMaL **B. 4027.**[1])

Megoldás (NMMV 2003. hivatalos megoldása): Nézzük a jobb oldali függvényt, ennek egyenlete: $y = \sqrt{\dfrac{11x-6}{6-x}}$. Ezt x-re rendezve $x = 6\dfrac{y^2+1}{y^2+11}$ adódik. Látható tehát, ha az egyik oldalt az x függvényének tekintjük, akkor a másik oldal az előbbi inverz függvénye. A két függvény képe egymás tükörképe az $y = x$ egyenesre nézve, ezért metszéspontjaik az $y = x$ egyenesen vannak. Így elegendő az $x = \dfrac{6(x^2+1)}{x^2+11}$ egyenletet megoldani. A rendezés utáni $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ egyenlet bal oldalának szorzat alakja $(x-1)(x-2)(x-3) = 0$. Ez alapján az egyenlet megoldásai az 1, 2, 3 számok, melyek igazzá is teszik az eredeti egyenlőséget.

*

Ezzel a hivatalos megoldás végére értünk.

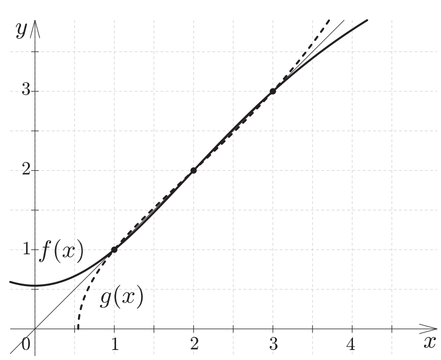
A lelkiismeretünk megnyugtatása végett ábrázoljuk az

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad f(x) = 6\frac{x^2+1}{x^2+11}$$

és a

$$g\colon \left[\frac{6}{11}; 6\right[\to \mathbb{R}; \quad g(x) = \sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$$

függvényt (*1. ábra*).



1. ábra

[1]Az **F. 2830.** megoldása nem jelent meg a Lapban, ezért a feladatot más feladatokhoz hasonlóan 2003-ban **B. 4027.** számmal újra kitűztük. Ennek megoldása már megjelent a Lapban, lásd *KöMaL*, 2008/4., 220. oldal.

Az ábra alapján az alábbi megállapításokat tehetjük:

- A két függvény grafikonja az $y = x$ egyenesen metszi egymást, tehát a megoldásnak ez a része látszólag rendben van.
- A figyelmes szemlélő számára látható az f függvény grafikonján, hogy a függvény nem kölcsönösen egyértelmű. Erre annak alapján is felfigyelhetünk, hogy az f függvény páros, hisz minden $x \in D_f$ esetén $-x \in D_f$ is teljesül, és
$$f(-x) = 6\frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^2 + 11} = 6\frac{x^2 + 1}{x^2 + 11} = f(x).$$

Tehát kézenfekvő az alábbi kérdés: Korrekt volt az inverz kapcsolat említése?

Mielőtt a kérdéssel behatóbban foglalkoznánk, nézzünk meg egy másik versenyfeladatot, melyet 2003-ban tűztek ki a Nemzetközi Magyar Matematika Versenyen.

2. feladat: *Oldjuk meg a valós számok halmazán a* $\log_3(2^x + 5) = \log_2(3^x - 5)$ *egyenletet.*

(NMMV 2003.)

(A hivatalos megoldás az alábbi volt.)

Megoldás: Vizsgáljuk az alábbi két függvényt:

$$f : \mathbb{R} \to]\log_3 5; \infty] \,;\ f(x) = \log_3(2^x + 5),$$
$$g :]\log_3 5; \infty] \to \mathbb{R};\ g(x) = \log_2(3^x - 5).$$

Mivel a két függvény egymás inverze, a grafikonjuk az $y = x$ egyenesre nézve szimmetrikus, így grafikonjaik csak ezen az egyenesen metszhetik egymást.

Ezért az egyenletnek csak olyan x szám lehet a megoldása, amelyre

$$\log_3(2^x + 5) = x = \log_2(3^x - 5),$$

vagyis $2^x + 5 = 3^x$. Ebből az $5 = 3^x - 2^x$ egyenlethez jutunk, aminek csak a pozitív számok halmazán lehet megoldása, hiszen a nempozitív számok halmazán a jobb oldali kifejezés első tagja nem nagyobb a második tagjánál.

Az x =2 megoldás, több megoldás pedig azért nincs, mert a $3^x - 2^x$ függvény a pozitív számok halmazán szigorúan monoton növekvő.

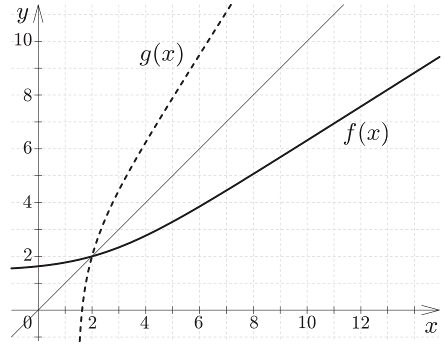
*

Érdemes megjegyezni, hogy utolsó megállapítás mindenképpen bizonyítást igényel. Az $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R};\ x \mapsto 3^x$ és a $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R};\ x \mapsto 2^x$ függvény is szigorúan monoton növekvő, és két szigorúan monoton növekvő függvény különbsége nem feltétlenül szigorúan monoton növekvő. Ebben az esetben viszont igen, hiszen

$$3^x - 2^x = 2^x \left[\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1\right],$$

valamint minden $x \in \mathbb{R}^+$ esetén $2^x > 0$, $\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1 > 0$ és mindkét tényező szigorúan monoton növekvő.

Ábrázoljuk az (1) függvényeket (*2. ábra*). A grafikon újfent megerősíteni látszik azt a gondolatot, mely szerint, ha egy invertálható függvény és inverzének a grafikonja metszi egymást, akkor a metszéspontnak az $y = x$ egyenesen kell lennie.



2. ábra

A továbbiakban alkalmazzuk a hivatalos megoldásokban látott gondolatmeneteket, módszereket.

3. feladat: *Határozzuk meg a következő egyenlet valós megoldásait.*

$$\sqrt{2x+6}=\frac{x^2-6}{2}\,.$$

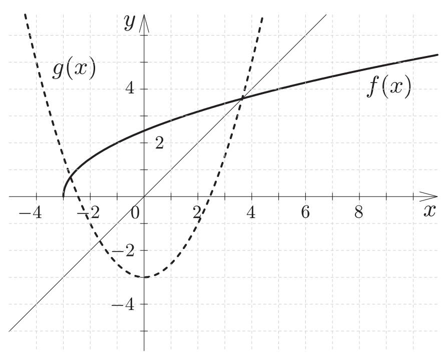
(Alkalmazzuk szó szerint az 1. feladatra közölt hivatalos megoldást.)

Megoldás: Nézzük a bal oldali függvényt, ennek egyenlete: $y=\sqrt{2x+6}$. Ezt x-re rendezve $x=\frac{y^2-6}{2}$ adódik. Látható tehát, hogy ha az egyik oldalt az x függvényének tekintjük, akkor a másik oldal az előbbi inverz függvénye. A két függvény képe egymás tükörképe az $y=x$ egyenesre nézve, ezért metszéspontjaik az $y=x$ egyenesen vannak. Így elegendő az $x=\frac{x^2-6}{2}$ egyenletet megoldani. Ennek megoldásai: $x_1=1+\sqrt{7}$; $x_2=1-\sqrt{7}$.

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk arról, hogy a második szám nem megoldása az egyenletnek, mert a bal oldal pozitív, a jobb oldal negatív értékű. Az első viszont kielégíti az egyenletet.

*

Nyugtassuk meg a lelkiismeretünket, és ábrázoljuk az $f\colon\ [-3;\infty[\ \to\mathbb{R};\ f(x)=\sqrt{2x+6}$, valamint a $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $g(x)=\frac{x^2-6}{2}$ függvényt (*3. ábra*).



3. ábra

A grafikonok két pontban metszik egymást. Eszerint az egyenletnek két valós megoldása van, szemben azzal, amit az előző megoldásban kaptunk.

Hol a hiba a korábbi gondolatmenetben? Miért veszítettünk megoldást az előző feladatban?

Az egyik hibát ott követtük el, hogy az inverz kapcsolat vizsgálata esetén csak formális algebrai átalakításokat végeztünk, és nem foglalkoztunk az e mögött rejlő matematikai tartalommal.

Adjuk meg a feladathoz kapcsolódó két kölcsönösen egyértelmű függvényt, melyek egymás inverzei. Ezek az

$$f\colon\ [-3;\infty[\ \to\mathbb{R}_0^+;\quad x\mapsto\sqrt{2x+6}\qquad\text{és a}\qquad g\colon\mathbb{R}_0^+\to[-3;\infty[;\quad x\mapsto\frac{x^2-6}{2}$$

függvények. Ha az egyenletet a $D_f\cap D_g=\mathbb{R}_0^+$ halmazon oldjuk meg, akkor az egyetlen megoldás tényleg az $x_1=1+\sqrt{7}$ szám. De a

$$\sqrt{2x+6}=\frac{x^2-6}{2}$$

egyenlet értelmezési tartománya nem az $\mathbb{R}_0^+$, hanem a $\left[-3;-\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6};\infty\right[$ halmaz. Ezen a halmazon viszont két megoldása van. Adjunk a feladatra korrekt megoldást.

I. megoldás: A $\left[-3;-\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6};\infty\right[$ halmazon az egyenlet mindkét oldala nemnegatív értékű, így négyzetre emeléssel az eredetivel ekvivalens egyenlethez jutunk. Végezzük el a négyzetre emelést és redukáljunk nullára.

$$x^4-12x^2-8x+12=0$$

Mivel az f és g függvény grafikonja az $y=x$ egyenesen metszi egymást, az $x=\frac{x^2-6}{2}$ egyenlet megoldásai gyökei lehetnek az előző negyedfokú egyenletnek is. Így azt várjuk, hogy x^2-2x-6 osztója az $(x^4-12x^2-8x+12)$-nek. A polinomosztást elvégezve kapjuk, hogy

$$x^4-12x^2-8x-12=(x^2-2x-6)(x^2+2x-2).$$

Így az eredeti egyenlet megoldásai, az $x^2 - 2x - 6 = 0$ és az $x^2 + 2x - 2 = 0$ másodfokú egyenletek megoldásai közül kerülnek ki, melyek az $1 + \sqrt{7}$; $1 - \sqrt{7}$; $-1 + \sqrt{3}$; $-1 - \sqrt{3}$ számok.

Ezek közül az értelmezési tartománynak csak az $1 + \sqrt{7}$; $-1 - \sqrt{3}$ számok az elemei.

2. megoldás: A $\left[-3; -\sqrt{6}\right] \cup \left[\sqrt{6}; \infty\right[$ halmazon keressük az $y = \sqrt{2x+6}$ és az $y = \dfrac{x^2-6}{2}$ egyenletű görbék metszéspontjainak első koordinátáját. Emeljük négyzetre az első egyenletet, majd adjuk hozzá a második kétszeresét. Ekkor az $y^2 + 2y = x^2 + 2x$ kétismeretlenes egyenlethez jutunk, melyet könnyen szorzattá alakíthatunk: $(y - x)(y + x + 2) = 0$. Ebből kapjuk, hogy $y = x$ vagy $y = -x - 2$. Ezt visszahelyettesítve a második egyenletbe az $x = \dfrac{x^2-6}{2}$ és a $-x - 2 = \dfrac{x^2-6}{2}$ egyenletekhez jutunk. Innen pedig megkaphatjuk a megoldásokat.

*

Könnyen gyárthatunk az előzőhöz hasonló egyenleteket. Az alábbiakban oldjunk meg még egy ilyen típusút.

4. feladat: *Oldjuk meg a valós számok halmazán a* $\sqrt[3]{2-x} = 2 - x^3$ *egyenletet.*

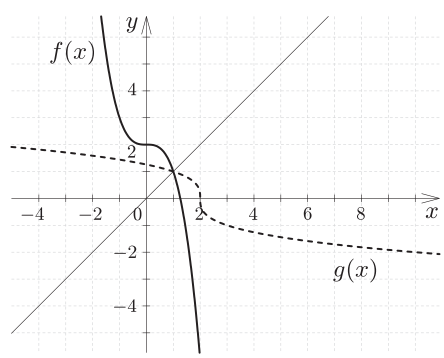
Megoldás: Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 2 - x^3$ függvény nyilván kölcsönösen egyértelmű, így létezik inverze. Könnyen látható, hogy ez a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $g(x) = \sqrt[3]{2-x}$ függvény, hisz $D_g = R_f$, $R_g = D_f$, valamint

$$f\big(g(x)\big) = 2 - \left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3 = 2 - (2 - x) = x.$$

Az eddig jól működő gondolatmenet alapján az f és g függvény grafikonja csak az $y = x$ egyenesen metszheti egymást, így a $2 - x^3 = x$ egyenlethez jutunk. Ezt átrendezve és szorzattá alakítva kapjuk az $(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$ egyenletet, melynek csak $x = 1$ a megoldása.

*

Ábrázoljuk az f és g függvényeket (*4. ábra*).

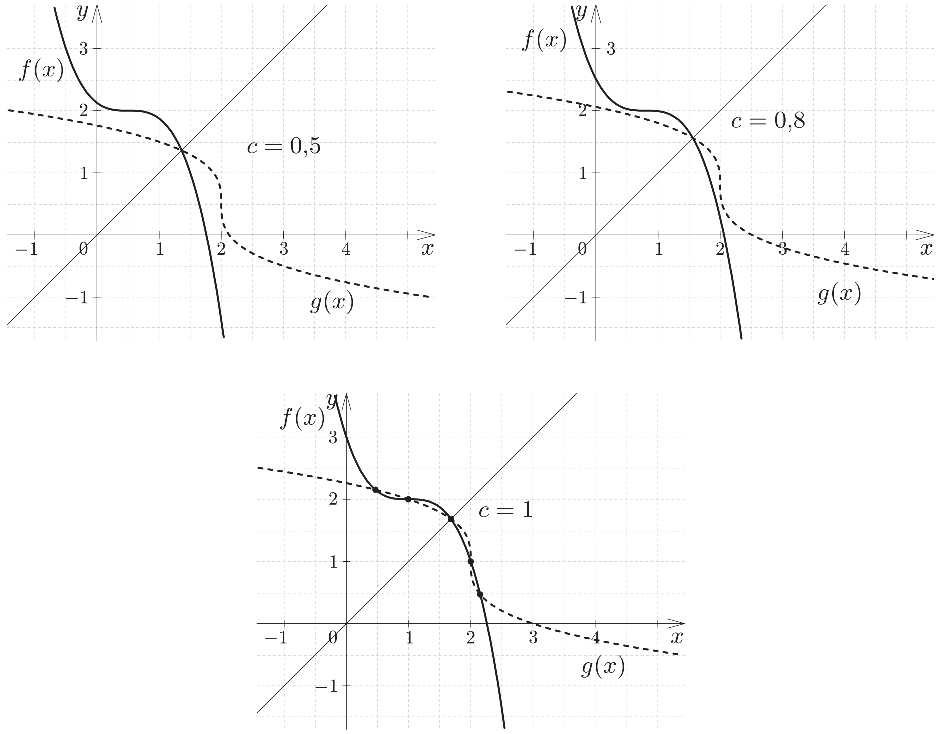


4. ábra

Úgy tűnik, a grafikon továbbra is igazolja a megoldásban alkalmazott gondolatmenetet. Az előző feladatban szereplő f függvényből kiindulva foglalkozzunk az $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 2 - (x - c)^3$ függvénnyel, ahol c nemnegatív valós paraméter. Mivel f_c bármely c esetén kölcsönösen egyértelmű, azért létezik inverze.

Adjuk meg ezt az inverz függvényt. Fejezzük ki az $y = 2 - (x - c)^3$ egyenletből az x-et. Ekkor az $x = c + \sqrt[3]{2-y}$ egyenlethez jutunk. Ha felcseréljük x-et és y-t, akkor megkapjuk az f_c függvény inverzének hozzárendelési szabályát. Tehát f_c inverze az $f_c^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $x \mapsto c + \sqrt[3]{2-x}$ függvény.

Ábrázoljuk néhány c érték esetén az f_c függvényt és inverzét. A $c = 0$ esetet már láttuk, legyen $c = 0{,}5$, $c = 0{,}8$, $c = 1$ (*5. ábra*).



5. ábra

A grafikon alapján kijelenthetjük, hogy az $(1-x)^3 + 2 = 1 + \sqrt[3]{2-x}$ egyenletnek öt valós megoldása van, melyek közül négyhez tartozó metszéspont nincs rajta az $y = x$ egyenesen.

Tehát hibás az az állítás, hogy ha egy invertálható függvény és inverzének a képe metszi egymást, akkor a metszéspont az $y = x$ egyenesen van!

Oldjuk meg az előző egyenletet.

Megoldás: Legyen $y = 1 - x$. Ekkor az $y^3 + 1 = \sqrt[3]{1+y}$ egyenletet kapjuk, melyet köbre emelve és rendezve az $y^9 + 3y^6 + 3y^3 - y = 0$ egyenlethez jutunk. Ennek az $y = 0$, így az eredetinek az $x = 1$ megoldása, ahogy azt a grafikonról is leolvashattuk. Az y kiemelésével kapott $y^8 + 3y^5 + 3y^2 - 1$ nyolcadfokú polinomnak az $y = -1$ gyöke, hisz az együtthatók váltakozó előjelű összege 0 (a hiányzó tagok együtthatója 0, és ezt figyelembe kell venni). Ebből kapjuk az eredeti egyenlet grafikonról is leolvasható másik egész gyökét, az $x = 2$-t.

Az előzőek alapján $y + 1$ osztója az $(y^8 + 3y^5 + 3y^2 - 1)$-nek, a hányadospolinomot a Horner-féle elrendezés ([3], 284. oldal) segítségével könnyedén meghatározhatjuk. Így kapjuk, hogy

$$y^8 + 3y^5 + 3y^2 - 1 = (y+1)\big(y^7 - y^6 + y^5 + 2y^4 - 2y^3 + 2y^2 + y - 1\big).$$

Mivel a két grafikon metszi egymást az $y = x$ egyenesen, az $x = (1-x)^3 + 2$ egyenlet valós gyöke, megoldása az eredeti egyenletnek is. Áttérve y-ra azt kapjuk, hogy az $y^3 + y + 1 = 0$ egyenlet valós megoldása gyöke az

$$y^7 - y^6 + y^5 + 2y^4 - 2y^3 + 2y^2 + y - 1$$

hetedfokú polinomnak is. Ennek alapján azt várjuk, hogy

$$y^3 + y + 1 \quad \text{osztója az} \quad \big(y^7 - y^6 + y^5 + 2y^4 - 2y^3 + 2y^2 + y - 1\big)\text{-nek},$$

ami teljesül is, amint arról polinomosztással meggyőződhetünk, $y^4 - y^3 + 2y - 1$ a hányados polinom. Tehát a feladatot visszavezettük az $y^3 + y + 1 = 0$ és az $y^4 - y^3 + 2y - 1 = 0$ egyenletek megoldására. Ebből meghatározhatjuk a még hiányzó három valós gyököt. (Lásd [3], 321–332. oldal.)

*

A továbbiakban foglalkozzunk a középiskolából jól ismert klasszikus inverz kapcsolattal.

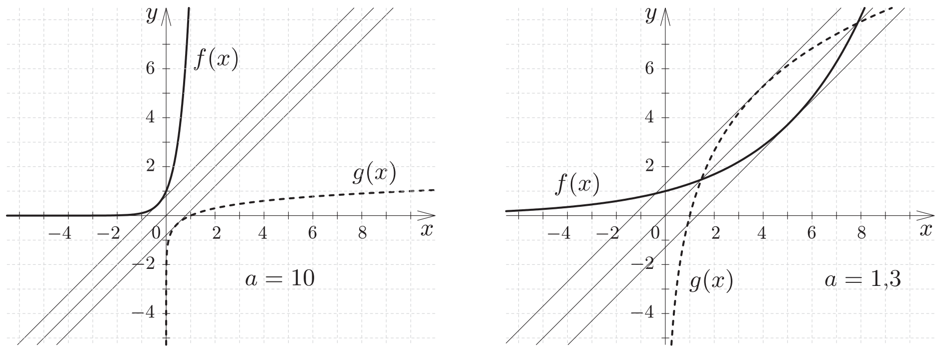
5. feladat: *Mely egytől különböző pozitív valós a esetén van legalább egy valós megoldása az $a^x = \log_a x$ egyenletnek?*

Megoldás: Látható, hogy a feladat ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy mely egytől különböző pozitív valós a esetén van legalább egy közös pontja az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$; $x \mapsto a^x$ és a $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; $x \mapsto \log_a x$ függvény grafikonjának.

Az eddigiek alapján csak annyit állíthatunk, hogy ha van közös pontjuk, akkor azok között biztosan található olyan, amelyik eleme az $y = x$ egyenesnek, hisz az f és g függvény folytonos az értelmezési tartományán.

Az eddigi ismereteink alapján nyilvánvaló, hogy ha $0 < a < 1$, akkor a két grafikon metszi egymást. Legyen ezután $a > 1$.

Ábrázoljuk $a = 10$, illetve $a = 1{,}3$ esetén a függvényeket. Az $y = x$ egyenes elválasztja a két grafikont $a = 10$ esetén, illetve belemetsz a grafikonokba $a = 1{,}3$ esetén (*6. ábra*).



6. ábra

Mivel a g függvény szigorúan konkáv, a következőt állíthatjuk. Az f és g függvény grafikonjának $a > 1$ esetén akkor és csak akkor van közös pontja, ha a g grafikonjának az $y = x$ egyenessel párhuzamos érintője az y tengelyt a nemnegatív tartományban metszi.

Határozzuk meg az érintő egyenletét. Mivel az érintő meredeksége 1 és

$$g'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln a},$$

az érintési pont x koordinátája $x = \dfrac{1}{\ln a}$. Tehát az érintési pont az $E\left(\dfrac{1}{\ln a}; \log_a \dfrac{1}{\ln a}\right)$ pont. Az y koordinátából látszik, hogy ez a pont csak $a > 1$ esetén létezik. Az érintő egyenlete:

$$y = x - \frac{1}{\ln a} + \log_a \frac{1}{\ln a}.$$

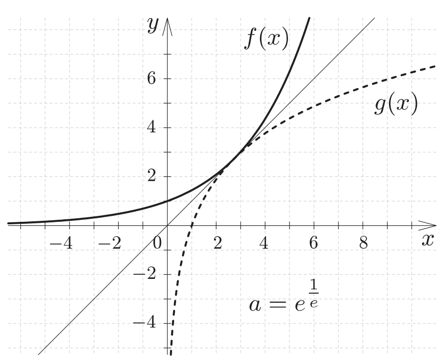
Az f és g grafikonjának akkor és csak akkor van közös pontja, ha

$$\frac{1}{\ln a} \le \log_a \frac{1}{\ln a} = -\log_a \ln a = -\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}.$$

Ezt végigszorozva a negatív $-\ln a$-val az $1 \ge \ln(\ln a)$ egyenlőtlenséghez jutunk. Használjuk fel, hogy $e > 1$.

$$1 \ge \ln(\ln a)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{1}{e} \ge \ln a$$
$$\Updownarrow$$
$$e^{\frac{1}{e}} \ge a$$

Tehát a vizsgált paraméteres egyenletnek akkor és csak akkor van valós megoldása, ha $0 < a < 1$ vagy $1 < a \le e^{\frac{1}{e}}$ (*7. ábra*).



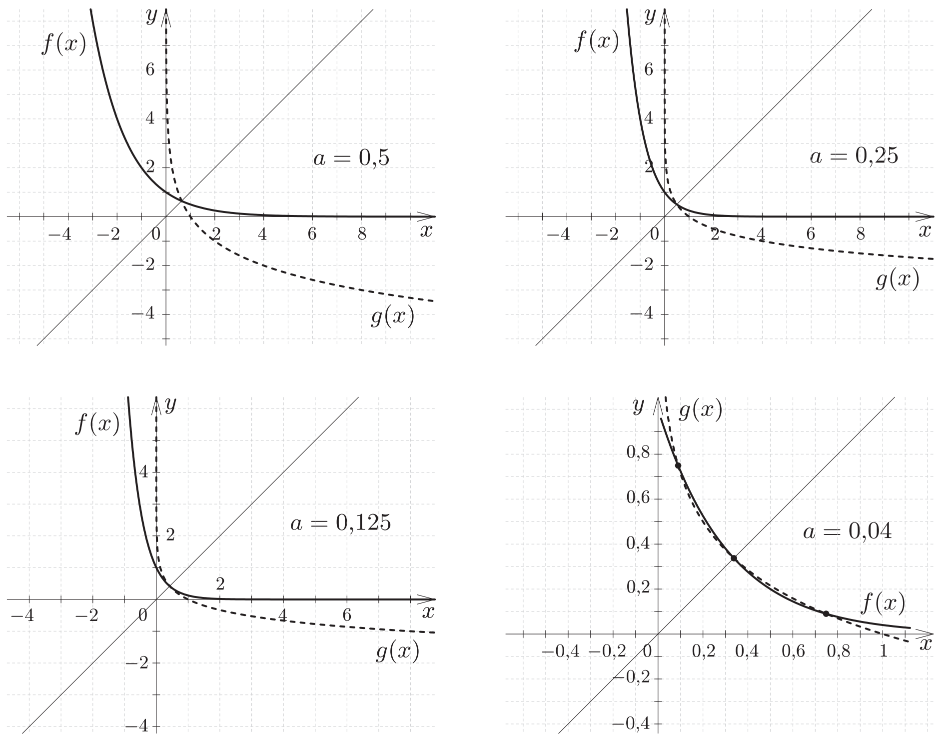
7. ábra

*

Az előző feladat után kézenfekvő az alábbi kérdés.

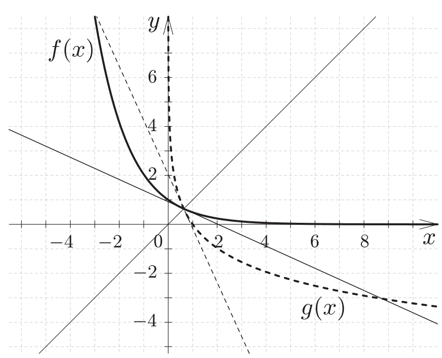
6. feladat: *Az 5. feladatban szereplő egyenletnek az a paraméter mely értékeinél van 1, illetve 2 valós megoldása? Van-e olyan a érték, amely esetén az egyenletnek kettőnél több valós megoldása van?*

Megoldás: Az előző feladatban láttuk, hogy ha $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$, akkor az egyenletnek két megoldása van, ha $a = e^{\frac{1}{e}}$, akkor egy. Vizsgáljuk meg a $0 < a < 1$ esetet; készítsünk néhány ábrát (*8. ábra*).



8. ábra

Vizsgáljuk meg, hogy milyen feltételek mellett van három metszéspontja a két görbének. Húzzuk be mindkét görbe érintőjét az $y = x$ egyenesre eső $P(x_0; x_0)$ pontba (*9. ábra*).

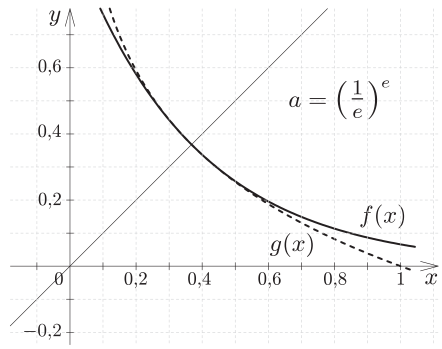


9. ábra

Lehet-e olyan eset, hogy a két görbe érintője megegyezik?

Mivel a két görbe egymás tükörképe az $y = x$ egyenesre nézve, a P pontba húzott érintőik is egymás tükörképei erre az egyenesre nézve. Tehát a két érintő csak úgy eshet egybe, ha merőleges az $y = x$ egyenesre, így iránytangense -1, azaz irányszöge $-45°$.

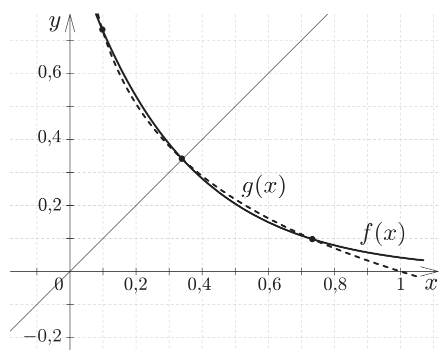
Használjuk fel, hogy $a^{x_0} = x_0$, és az exponenciális függvény deriváltja az x_0 pontban -1, tehát $a^{x_0} \cdot \ln a = -1$. Így $a = \left(\frac{1}{e}\right)^e$ (*10. ábra*).



10. ábra

Ha $\left(\dfrac{1}{e}\right)^e < a < 1$, akkor az exponenciális függvény $P(x_0; x_0)$ pontjába húzott érintőjének a meredeksége negatív, de nagyobb -1-nél. Így a P pontba húzott érintő irányszögének abszolút értéke kisebb $45°$-nál, a logaritmus függvényé nagyobb. Ezért az x_0-nak van olyan jobb oldali környezete, amelybe eső x-ek esetén a logaritmus függvény grafikonja az exponenciális függvényhez húzott érintő alatt halad, míg az exponenciális függvény grafikonja az érintő fölött. Az $a < 1$ alapú logaritmus függvény $x_0 < x$ abszcisszájú pontjaiba húzott érintőinek a meredeksége kisebb, mint az inverze ugyanilyen abszcisszájú pontjába húzott érintőjének meredeksége. Így a két grafikon csak a P pontban metszi egymást.

Ha $0 < a < \left(\dfrac{1}{e}\right)^e$, akkor az exponenciális függvény P-beli érintőjének az irányszöge a nagyobb abszolút értékű. Így a P abszcisszájának van olyan bal oldali környezete, ahol a logaritmus függvény grafikonja az exponenciális függvény grafikonja alatt halad (lásd a *11. ábrát*). Valahol viszont bele kell metszenie, mert az exponenciális függvény grafikonja metszi az y tengelyt, a logaritmus függvényé nem. Több metszéspont pedig nem jön létre, mert a tengelyek elválasztják a grafikonokat.



11. ábra

Összegzés: Az $a^x = \log_a x$ $(0 < a,\ a \neq 1)$ egyenletnek:
– nincs valós megoldása, ha $e^{\frac{1}{e}} < a$;
– egy valós megoldása van, ha $a = e^{\frac{1}{e}}$, vagy $\left(\dfrac{1}{e}\right)^e \leq a < 1$;
– két valós megoldása van, ha $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$;
– három valós megoldása van, ha $0 < a < \left(\dfrac{1}{e}\right)^e$.

*

Térjünk vissza az 1., majd a 2. feladatra. Először adjunk az 1.-re egy olyan megoldást, amely elkerüli a két oldal közötti inverz kapcsolat felhasználását.

1. feladat: *Oldjuk meg a valós számok halmazán a*

$$6\frac{x^2+1}{x^2+11} = \sqrt{\frac{11x-6}{6-x}}$$

egyenletet.

Megoldás: (Ezzel a megoldással lényegében azonos a **B. 4027.**-es feladatra adott KöMaL internetes megoldás, amely a http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=feladat&f=B4027&l=hu oldalon olvasható.)

Az egyenlet értelmezési tartománya a $\left[\frac{6}{11}; 6\right[$ intervallum. Emeljük négyzetre az egyenletet, majd redukáljunk nullára. Ekkor a

$$47x^5 - 222x^4 + 314x^3 - 564x^2 + 1367x - 942 = 0$$

egyenlethez jutunk. Mivel az együtthatók összege 0, azért $x = 1$ gyöke az egyenletnek, tehát

$$x - 1 \quad \text{osztója a} \quad \left(47x^5 - 222x^4 + 314x^3 - 564x^2 + 1367x - 942\right)\text{-nek.}$$

Horner-elrendezéssel vagy polinomosztással meghatározhatjuk a hányadost, amely a

$$47x^4 - 175x^3 + 139x^2 - 425x + 942$$

polinom. Ha ennek van egész gyöke, akkor az csak a konstans tag osztói közül kerülhet ki. Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy $x = 2$ gyök. Így

$$x - 2 \quad \text{osztója a} \quad \left(47x^4 - 175x^3 + 139x^2 - 425x + 942\right)\text{-nek.}$$

A hányados megint meghatározható Horner-elrendezéssel vagy polinomosztással, amely a

$$47x^3 - 81x^2 - 23x - 471$$

polinom. Ennek $x = 3$ gyöke, így a polinom osztható $(x - 3)$-mal. A hányados a $47x^2 + 60x + 157$, melynek nincs valós gyöke, mivel a diszkriminánsa negatív. Tehát az egyenlet megoldásai az 1, 2, 3 számok.

*

A 2. feladat kapcsán, az ábra alapján már meggyőződtünk arról, hogy az $f(x) = \log_3(2^x + 5)$ és a $g(x) = \log_2(3^x - 5)$ függvények grafikonja csak az $y = x$ egyenesen metszi egymást. Ezt most bizonyítsuk is be!

Azt már bebizonyítottuk, hogy az $f(x) = \log_3(2^x + 5)$ és a $g(x) = \log_2(3^x - 5)$ függvények grafikonjának az $y = x$ egyenesen csak az $x = 2$ helyen van metszéspontja, mert a $\log_3(2^x + 5) = x = \log_2(3^x - 5)$ egyenletnek csak az $x = 2$ a megoldása.

Megmutatjuk, hogy az f függvény az értelmezési tartományán szigorúan konvex, a g pedig szigorúan konkáv.

Az f első deriváltja

$$f'(x) = \left(\log_3(2^x + 5)\right)' = \frac{\ln 2 \cdot 2^x}{\ln 3 \cdot (2^x + 5)},$$

így a második derivált

$$f''(x) = \left(\frac{\ln 2 \cdot 2^x}{\ln 3 \cdot (2^x + 5)}\right)' = \frac{\ln^2 2 \cdot 2^x}{\ln 3} \frac{5}{(2^x + 5)^2},$$

ami bármely valós x esetén pozitív, tehát $f$szigorúan konvex függvény. A g függvény első deriváltja

$$g'(x) = \left(\log_2(3^x - 5)\right)' = \frac{\ln 3 \cdot 3^x}{\ln 2 \cdot (3^x - 5)}.$$

A második deriváltja

$$g''(x) = \left(\frac{\ln 3 \cdot 3^x}{\ln 2 \cdot (3^x - 5)}\right)' = \frac{\ln^2 3 \cdot 3^x}{\ln 2} \frac{-5}{(3^x - 5)^2},$$

ami a g értelmezési tartományának bármely x értékére negatív, így a g az értelmezési tartományán szigorúan konkáv.

Az eddigiekből következik, hogy a 2-nél kisebb helyeken az f függvény grafikonjának minden pontja az $y = x$ egyenes felett, a g függvényé pedig az alatt helyezkedik el, tehát itt nem metszhetik egymást, míg a 2-nél nagyobb helyeken fordított a helyzet, így ott sem metszhetik egymást. Ezzel igazoltuk, hogy a két grafikonnak csak az $x = 2$ helyen van közös pontja.

*

Konklúzió:

- Nagyon fontos, hogy két függvény közötti inverz kapcsolat bizonyítása ne csak formális algebrai átalakítás legyen, hanem ennél mélyebb megfontolás.

- Az $f^{-1}(x) = f(x)$ típusú egyenleteknél akkor és csak akkor hivatkozhatunk arra, hogy a függvény és inverzének a grafikonja csak az $y = x$ egyenesen metszi egymást, ha ezt az adott egyenlet kapcsán bizonyítottuk.

Létezik-e olyan tétel, amely segítséget nyújt a bizonyításhoz?
Mielőtt erre rátérnénk, oldjuk meg az alábbi feladatot.

7. feladat: *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$\sqrt[3]{4x-3} = \frac{x^3+3}{4}.$$

Megoldás: Az könnyen látható, hogy ez az egyenlet is az $f^{-1}(x) = f(x)$ típusú egyenletek közé tartozik, hiszen az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \sqrt[3]{4x-3}$ és a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ x \mapsto \dfrac{x^3+3}{4}$ függvények egymás inverzei, ahol mindkét függvény szigorúan monoton növekvő. Átrendezés után az eredetivel ekvivalens $\sqrt[3]{4 \cdot \sqrt[3]{4x-3} - 3} = x$ egyenletet kapjuk, mely az f függvénnyel kifejezve a következő alakban írható fel: $f\big(f(x)\big) = x$.

Az alábbiakban bebizonyítjuk, hogy mivel az f függvény szigorúan monoton növekedő, azért az $f\big(f(x)\big) = x$ egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az $f(x) = x$ egyenlet megoldáshalmazával.

Legyen z megoldása az $f(x) = x$ egyenletnek. Ekkor $f(z) = z$, így $f\big(f(z)\big) = f(z)$, tehát $f\big(f(z)\big) = z$.

Legyen másrészt r megoldása az $f\big(f(x)\big) = x$ egyenletnek, azaz $f\big(f(r)\big) = r$. Tegyük fel, hogy $r < f(r)$. Mivel az f függvény szigorúan monoton növekvő, ekkor $f(r) < f\big(f(r)\big)$, tehát $r < f(r) < f\big(f(r)\big)$, ami ellentmondás. Hasonlóan be lehet látni, hogy $f(r) < r$ sem lehetséges, tehát szükségképpen $r = f(r)$. Így a két egyenlet megoldáshalmaza egyenlő.

Tehát az eredeti egyenlet ekvivalens a $\sqrt[3]{4x-3} = x$ egyenlettel. Köbre emelés és átrendezés után $x^3 - 4x + 3 = 0$. Ennek a megoldásai az eddig alkalmazott módszerek felhasználásával már könnyen meghatározhatók, és ezek az 1, $\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$, $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$ számok.

*

A feladatnak két nagyon fontos hozadéka a következő.

1. hozadék: Adott az $f^{-1}(x) = f(x)$ egyenlet, ahol $f\colon D_f \to R_f;\ x \mapsto f(x)$ szigorúan monoton növekvő függvény. Ebből következik, hogy $f^{-1}(x)$ is szigorúan monoton növekvő. (Lásd [1], 151. oldal.) Az egyenlet két oldalára alkalmazva a szigorúan monoton f függvényt kapjuk, hogy

$$f\big(f^{-1}(x)\big) = f\big(f(x)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad x = f\big(f(x)\big).$$

Azt pedig az előbb beláttuk, hogy az utolsó egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az $f(x) = x$ egyenlet megoldáshalmazával, mivel f szigorúan monoton növekvő. Így az $f^{-1}(x) = f(x)$ egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az $f(x) = x$ egyenlet megoldáshalmazával, ha f szigorúan monoton növekvő. Így megfogalmazhatjuk az alábbi tételt.

Tétel. *Ha az $f\colon D_f \to R_f;\ x \mapsto f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, akkor a $D_f \cap R_f$ halmazon az $f^{-1}(x) = f(x)$ egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az $f(x) = x$ egyenlet megoldáshalmazával.*

Megjegyzés: Az 1. és a 2. feladatra adott első megoldást úgy tehetjük teljesen korrektté, ha belátjuk, hogy az inverz kapcsolatban szereplő függvények szigorúan monoton növekvők. Ezt az olvasóra bízzuk.

2. hozadék: Ha az $f\colon D_f \to R_f;\ x \mapsto f(x)$ függvény szigorúan monoton növekvő, akkor az $\big(f\big(\ldots\big(f(x)\big)\ldots\big)\big) = x$ egyenlet megoldáshalmaza megegyezik az $f(x) = x$ egyenlet megoldáshalmazával.

Végül nézzünk néhány feladatot, melynek megoldását az olvasóra bízzuk.

Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenleteket:

1. $\sqrt{x+5} = x^2 - 5$;
2. $\sqrt{2x+7} = \dfrac{x^2-7}{2}$;
3. $x^2 + 6x + 7 = \sqrt{x+5}$;
4. $(2+x)^{\log_2 3} - (3+x)^{\log_3 2} = 1,\ x \in\ ]-2; \infty]$
(*Dan Negulescu,* Matematikai Olimpia, Braila, 2001);
5. $\big(3^{\frac{x}{4}} - 1\big)^2 = \log_{\sqrt[4]{3}}\big(\sqrt{x} + 1\big)$;
6. $(x^3-6)^3 = 6 + \sqrt[3]{x+6}$;
7. $x = \sqrt{-3 + 4\sqrt{-3 + 4\sqrt{-3+4x}}}$.

Külön köszönettel tartozom *Katz Sándornak,* aki értékes tanácsaival segítette munkámat.

Felhasznált irodalom

[1] Laczkovich Miklós – T. Sós Vera: *Analízis I.* (Nemzeti Tankönyvkiadó, 2006).

[2] Szele Tibor: *Bevezetés az algebrába* (Tankönyvkiadó, 1972).

[3] Dr. Szendrei János: *Algebra és számelmélet* (Tankönyvkiadó).

[4] Olosz Ferenc: *Egyenletek megoldása inverz függvények felhasználásával.*

[5] Szilassi Lajos: *A kételkedés joga – és kötelessége.*

[4] *KöMaL* (1893–2010).

[5] *NMMV feladatok és megoldások 1992–2007* (CD, Szeged, 2007).