I. rész

1. *Számítsuk ki számológép használata nélkül a következő kifejezések pontos értékét:*

$$a = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}},$$
$$b = \left(0{,}2^{-1} \cdot 3125^{0{,}4} - \sqrt[3]{64^2} - 1\right) : 27,$$
$$c = -4 \cdot \sin\frac{67\pi}{6} \cdot \lg 0{,}01.$$

(*11 pont*)

Megoldás. A nagy négyzetgyök alatt végezzük el a kivonást:

$$a = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}\left(3+2\sqrt{2}\right) - 2\sqrt{2}\left(3-2\sqrt{2}\right)}{\left(3-2\sqrt{2}\right)\left(3+2\sqrt{2}\right)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{6\sqrt{2}+8-6\sqrt{2}+8}{9-8}} = \sqrt{16} = 4.$$

Alkalmazzuk a negatív és a törtkitevőkre tanult definíciókat:

$$b = \left(0{,}2^{-1} \cdot 3125^{0{,}4} - \sqrt[3]{64^2} - 1\right) : 27 = \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \cdot \left(5^5\right)^{\frac{2}{5}} - 64^{\frac{2}{3}} - 1}{27} =$$
$$= \frac{5 \cdot 5^2 - \left(2^6\right)^{\frac{2}{3}} - 1}{27} = \frac{125-16-1}{27} = 4.$$

Tudjuk, hogy

$$\sin\frac{67\pi}{6} = \sin\left(\frac{7\pi}{6} + 5 \cdot 2\pi\right) = \sin\frac{7\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}.$$

Ezt és a logaritmus definícióját felhasználva:

$$c = -4 \cdot \sin\frac{67\pi}{6} \cdot \lg 0{,}01 = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \lg 10^{-2} = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) = -4.$$

2. *Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:*

$$\frac{\cos^2 x + 4}{\sin^2 x - 4} = \frac{-3\cos^2 x + 3\sin x - 4}{\cos^2 x + 3}.$$ (*12 pont*)

Megoldás. Tudjuk, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ezért a jobb oldalon álló tört nevezője:

$$\cos^2 x + 3 = 4 - \sin^2 x.$$

Vagyis az egyenletet a következő alakban is írhatjuk:

$$\frac{\cos^2 x + 4}{\sin^2 x - 4} = \frac{3\cos^2 x - 3\sin x + 4}{\sin^2 x - 4}.$$

Mivel $-1 \le \sin x \le 1$, azért a törtek minden valós x esetén értelmezettek lesznek, hiszen a nevezőjük nem lesz nulla.

A két oldal nevezője egyenlő, ezért akkor lesz a két tört egyenlő, ha a számlálók is egyenlők:

$$\cos^2 x + 4 = 3\cos^2 x - 3\sin x + 4,$$
$$0 = 2\cos^2 x - 3\sin x.$$

Ismét alkalmazhatjuk, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, ekkor a következő, $\sin x$-re másodfokú egyenletet kapjuk:

$$2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0.$$

Alkalmazzuk a megoldóképletet:

$$(\sin x)_{1;2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}.$$

Két lehetőséget kapunk:
I. $\sin x = -2$. Ez nem ad megoldást.
II. $\sin x = \frac{1}{2}$. Ekkor

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi, \quad \text{ahol} \quad k_1 \in \mathbb{Z},$$
$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi, \quad \text{ahol} \quad k_2 \in \mathbb{Z}.$$

3. *Egy háromjegyű szám négyszereséhez 36-ot kell adnunk, hogy a számjegyeiből a fordított sorrendben alkotott háromjegyű számot kapjuk. Melyik volt az eredeti háromjegyű szám?* *(14 pont)*

Megoldás. Az eredeti háromjegyű számot jelöljük $\overline{abc}$-vel, ahol a, b, c a szám számjegyeit jelöli. Mivel $\overline{abc}$ és $\overline{cba}$ is háromjegyű szám, azért $a \neq 0$, $c \neq 0$. A feladat szövege alapján a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$4 \cdot \overline{abc} + 36 = \overline{cba}.$$

Vegyük figyelembe a helyiértékeket:

$$\begin{aligned} 4 \cdot (100a + 10b + c) + 36 &= 100c + 10b + a, \\ 400a + 40b + 4c + 36 &= 100c + 10b + a, \\ 399a + 30b + 36 &= 96c. \end{aligned}$$

Mivel a jobb oldal legnagyobb értéke $96 \cdot 9$, azaz 864 lehet, azért az a értéke vagy 1, vagy 2 lehet.
I. eset: $a = 1$. Ekkor az egyenlet:

$$\begin{aligned} 399 \cdot 1 + 30b + 36 &= 96c, \\ 30b + 435 &= 96c. \end{aligned}$$

A bal oldal osztható 5-tel, ezért a jobb oldalon az eddigi feltételeink alapján csak a $c = 5$ jöhetne szóba. Fejezzük ki a b-t:

$$b = \frac{96 \cdot 5 - 435}{30} = 1{,}5.$$

Ebben az esetben nem kaptunk megfelelő háromjegyű számot.
II. eset: $a = 2$. Ekkor az egyenlet:

$$\begin{aligned} 399 \cdot 2 + 30b + 36 &= 96c, \\ 30b + 834 &= 96c. \end{aligned}$$

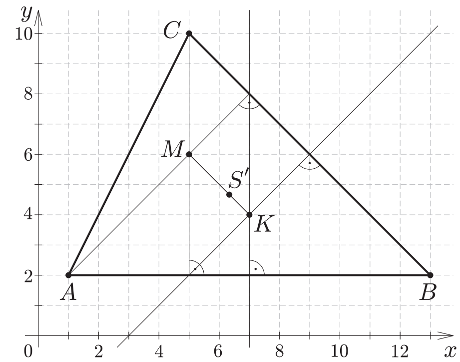
Mivel a bal oldal 834-nél nem kisebb, csak a $c = 9$ jöhet szóba. Ekkor a b-t is megkapjuk:

$$b = \frac{96 \cdot 9 - 834}{30} = 1.$$

Vagyis a feladat egyedüli megoldása a 219.
(Valóban: $4 \cdot 219 + 36 = 912$.)

4. *Csúcsainak koordinátáival adott egy háromszög: $A(1;2)$, $B(13;2)$, $C(5;10)$. Számítással igazoljuk ebben a háromszögben, hogy az MK szakasz K ponthoz közelebbi harmadoló pontja az ABC háromszög S súlypontja lesz. (M a magasságpontot, K a háromszög köré írt kör középpontját jelöli.)* *(14 pont)*

Megoldás. Készítsünk *ábrát.* Mivel AB oldal párhuzamos az x tengellyel, azért az M magasságpont rajta van a C csúcsra illeszkedő y tengellyel párhuzamos egyenesen. Ez azt jelenti, hogy az M pont első koordinátája egyenlő a C csúcs első koordinátájával, ami 5. Írjuk fel az A csúcsra illeszkedő magasság egyenletét. Ez a magasság merőleges a BC egyenesre, ezért a C-ből B-be mutató vektor az egyik normálvektora lesz. A megadott koordinátákkal ez a $(8;-8)$ vektor, aminek vehetjük a nyolcadát, hiszen az is merőleges lesz a kérdéses magasságra. Az $A(1;2)$ pontra illeszkedő, $\mathbf{n}(1;-1)$ normálvektorú egyenes egyenlete: $x - y = -1$. Mivel az M pont erre az egyenesre is illeszkedik, és az első koordinátáját már ismerjük, azért a második koordinátát is megkapjuk behelyettesítéssel: $M(5;6)$.



Mivel AB oldal párhuzamos az x tengellyel, azért a K középpont rajta van az AB szakasz y tengellyel párhuzamos felező merőlegesén. Vagyis a K pont első koordinátája egyenlő az A és a B csúcs első koordinátáinak számtani közepével, ami 7. Írjuk fel a BC oldal felező merőlegesének egyenletét. Ez az egyenes párhuzamos az A-ra illeszkedő magassággal, ezért normálvektoraik megegyeznek. Meghatározzuk a BC oldal felezőpontjának koordinátáit a megadott csúcsokkal: $(9;6)$. Vagyis a felező merőleges egyenes egyenlete: $x-y=3$. Mivel a K pont erre az egyenesre is illeszkedik, és az első koordinátáját már ismerjük, azért a második koordinátát is megkapjuk: $K(7;4)$.

Az M és a K ismeretében írjuk fel az MK szakasz K-hoz közelebbi S' harmadolópontjának koordinátáit:

$$S'\left(\frac{2\cdot 7+5}{3};\frac{2\cdot 4+6}{3}\right).$$

Vagyis a keresett harmadolópont:

$$S'\left(\frac{19}{3};\frac{14}{3}\right).$$

Végezetül számoljuk ki az ABC háromszög S súlypontjának koordinátáit:

$$S\left(\frac{1+13+5}{3};\frac{2+2+10}{3}\right).$$

A háromszög súlypontja:

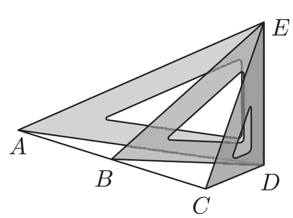
$$S\left(\frac{19}{3};\frac{14}{3}\right).$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Megjegyzés. Általában is igazolható, hogy az M, K, S pontok egy egyenesre, az Euler-egyenesre illeszkednek, és az S az MK szakaszon a K-hoz közelebbi harmadoló pont. Most azonban nem hivatkozhattunk erre, mert a feladat kérése az volt, hogy számítással ebben a megadott háromszögben igazoljuk az állítást.

II. rész

5. *Az ábrán látható építményt három derékszögű vonalzóból úgy raktuk össze, hogy az azonos hosszúságú befogójuknál illeszkedjenek egymáshoz, a további befogók pedig az asztallapon legyenek.*



A középső vonalzó egyenlő szárú, az egyik szélsőnek a hosszú, a másiknak a rövid befogója érintkezik az asztallappal. Az ábrán látható A, B és C pontok egy egyenesre illeszkednek, és $AB=BC=8$ cm.

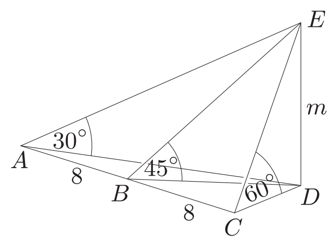
a) Adjuk meg az ADE, BDE és CDE derékszögű háromszögek területének arányát.

b) Milyen magasan van az asztallap fölött az E pont? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Készítsünk *vázlatrajzot.* Az ADE derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{m}{AD}$. Vagyis az AD hossza kifejezhető az m segítségével:

$$AD = \frac{m}{\operatorname{tg} 30°} = m\sqrt{3}\,.$$

Hasonlóan adódik a BDE és a CDE derékszögű háromszögekben a BD és a CD szakaszok hossza: $BD = m$, $CD = \dfrac{m}{\sqrt{3}}$.



Ezek segítségével a területeket is fel tudjuk írni. Mivel a területek arányát kell megadnunk, azért most kényelmesebb a területek kétszeresével számolnunk:

Az ADE területének kétszerese: $2T_1 = m^2 \cdot \sqrt{3}$.

A BDE területének kétszerese: $2T_2 = m^2$.

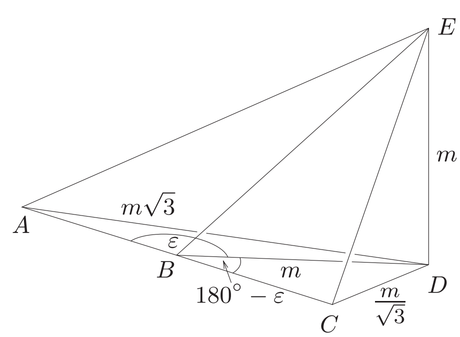
A CDE területének kétszerese: $2T_3 = \dfrac{m^2}{\sqrt{3}}$.

Ezek alapján a területek aránya:

$$T_1 : T_2 : T_3 = \sqrt{3} : 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = 3 : \sqrt{3} : 1.$$

b) Az *ábrán* látható jelöléseket használva (és felhasználva, hogy az AD, BD és CD szakaszok hosszát ki tudjuk fejezni az m segítségével) alkalmazzuk az ABD és a CBD háromszögre a koszinusz-tételt az ABD háromszögre:

$$\left(m\sqrt{3}\right)^2 = 8^2 + m^2 - 2 \cdot 8 \cdot m \cdot \cos\varepsilon,$$
$$3m^2 = 64 + m^2 - 16m \cdot \cos\varepsilon.$$



A CBD háromszögre:

$$\left(\frac{m}{\sqrt{3}}\right)^2 = 8^2 + m^2 - 2 \cdot 8 \cdot m \cdot \cos(180° - \varepsilon),$$
$$\frac{m^2}{3} = 64 + m^2 - 16m \cdot \cos(180° - \varepsilon),$$
$$\frac{m^2}{3} = 64 + m^2 + 16m \cdot \cos\varepsilon.$$

Adjuk össze a koszinusz-tétellel felírt két egyenletet:

$$\frac{10m^2}{3} = 128 + 2m^2, \qquad m^2 = 96.$$

Így megkaptuk a keresett magasságot: $m = \sqrt{96} \approx 9{,}8$.

Vagyis az E pont az asztallapja fölött kb. 9,8 cm magasan van.

6. *Tekintsük az $f(x)=x^2$ hozzárendelésű függvény grafikonjára illeszkedő, az*

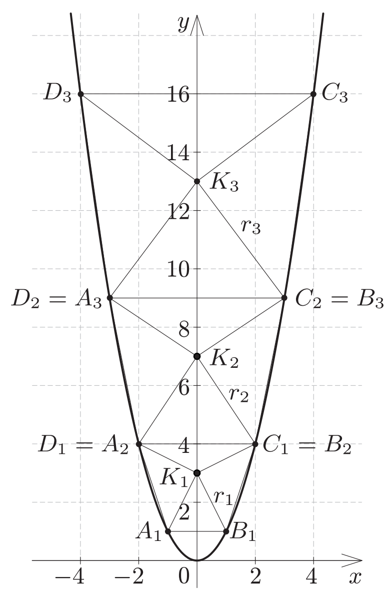
$$A_n\big(-n;f(-n)\big),\quad B_n\big(n;f(n)\big),\quad C_n\big(n+1;f(n+1)\big),\quad D_n\big(-n-1;f(-n-1)\big)$$

pontok által meghatározott húrtrapézokat (n pozitív egész számot jelöl). Az $A_nB_nC_nD_n$ körülírt körének sugara legyen r_n.

a) Adjuk meg az $r_1+r_2+r_3$ összeget.

b) Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_1^2+r_2^2+\dots+r_n^2}{n^3}$ határértéket. (*16 pont*)

Megoldás. *a*) A feladat szövegét értelmezve készítsünk egy *ábrát.*



Az $A_1B_1C_1D_1$ húrnégyszög körülírt körének középpontja: $K_1(0;k_1)$. Tudjuk, hogy $r_1=K_1B_1=K_1C_1$. A koordinátákkal kifejezve:

$$\sqrt{(1-0)^2+(1-k_1)^2}=\sqrt{(2-0)^2+(4-k_1)^2},$$
$$1+1-2k_1+k_1^2=4+16-8k_1+k_1^2,$$
$$k_1=3.$$

Vagyis $K_1(0;3)$, és $r_1=K_1B_1=\sqrt5$.

Az $A_2B_2C_2D_2$ húrnégyszög körülírt körének középpontja: $K_2(0;k_2)$. Tudjuk, hogy $r_2=K_2B_2=K_2C_2$. A koordinátákkal kifejezve:

$$\sqrt{(2-0)^2+(4-k_2)^2}=\sqrt{(3-0)^2+(9-k_2)^2},$$
$$4+16-8k_2+k_2^2=9+81-18k_2+k_2^2,$$
$$k_2=7.$$

Vagyis $K_2(0;7)$, és $r_2=K_2B_2=\sqrt{13}$.

Az $A_3B_3C_3D_3$ húrnégyszög körülírt körének középpontja: $K_3(0;k_3)$. Tudjuk, hogy $r_3=K_3B_3=K_3C_3$. A koordinátákkal kifejezve:

$$\sqrt{(3-0)^2+(9-k_3)^2}=\sqrt{(4-0)^2+(16-k_3)^2},$$
$$9+81-18k_3+k_3^2=16+256-32k_3+k_3^2,$$
$$k_3=13.$$

Vagyis $K_3(0;13)$, és $r_3=K_3B_3=5$.

Ezek alapján: $r_1+r_2+r_3=\sqrt5+\sqrt{13}+5\approx 10{,}84$.

b) Az előző részben látottak alapján járunk el most is. Az $A_nB_nC_nD_n$ húrnégyszög körülírt körének középpontja: $K_n(0;k_n)$. Tudjuk, hogy $r_n = K_nB_n = K_nC_n$. A koordinátákkal kifejezve:

$$\begin{aligned}
\sqrt{(n-0)^2+\left(n^2-k_n\right)^2} &= \sqrt{(n+1-0)^2+\left(n^2+2n+1-k_n\right)^2},\\
n^2+n^4-2n^2k_n+k_n^2 &= n^2+2n+1+\left(n^2+2n+1\right)^2-2k_n\left(n^2+2n+1\right)+k_n^2,\\
(4n+2)k_n &= 4n^3+6n^2+6n+2,\\
k_n &= \frac{2n^3+3n^2+3n+1}{2n+1} = \frac{(2n+1)\left(n^2+n+1\right)}{2n+1} = n^2+n+1.
\end{aligned}$$

Vagyis $K_n\left(0;n^2+n+1\right)$, és $r_n^2 = (n-0)^2+\left(n^2-n^2-n-1\right)^2 = n^2+(n+1)^2$.

Most már felírhatjuk a tört számlálójában szereplő összeget:

$$r_1^2+r_2^2+\dots+r_n^2 = \left(1^2+2^2\right)+\left(2^2+3^2\right)+\dots+\left(n^2+(n+1)^2\right).$$

A zárójeles kifejezések első tagjai 1-től n-ig a négyzetszámok összegét adják, a második tagjai pedig 1-től $(n+1)$-ig a négyzetszámok összegénél 1-gyel kisebb összeget adnak:

$$\begin{aligned}
r_1^2+r_2^2+\dots+r_n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}-1 =\\
&= \frac{(n+1)\left(2n^2+n+2n^2+7n+6\right)-6}{6} =\\
&= \frac{4n^3+8n^2+6n+4n^2+8n+6-6}{6} = \frac{2n^3+6n^2+7n}{3}.
\end{aligned}$$

Ezt a képletet és a határértékre vonatkozó tételeket felhasználva:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_1^2+r_2^2+\dots+r_n^2}{n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+6n^2+7n}{3n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{6}{n}+\frac{7}{n^2}}{3} = \frac{2}{3}.$$

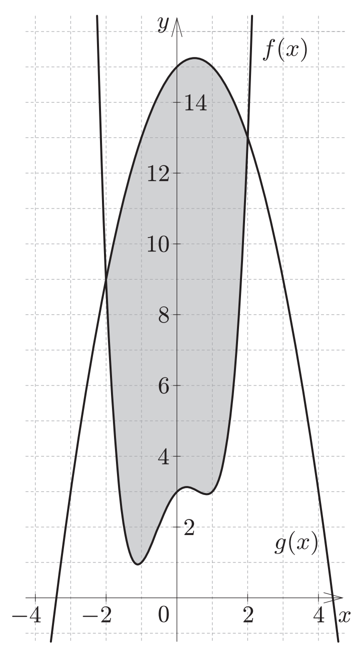
7. *Egy terepasztalon az* ábrán *látható folt egy tó alakját mutatja. Ha ezt a síkidomot* 1 cm *egységű koordinátarendszerbe helyezzük, akkor a határvonalát az*

$$f(x) = x^4-2x^2+x+3$$

és a

$$g(x) = -x^2+x+15$$

hozzárendeléssel adott függvények grafikonja adja.



a) Milyen messze van egymástól a grafikonok metszéspontja?

b) Mekkora a folt területe? (*16 pont*)

Megoldás. *a*) Szükségünk van a két függvény grafikonjának a metszéspontjaira. Ezért a következő egyenletet kell megoldanunk:

$$x^4 - 2x^2 + x + 3 = -x^2 + x + 15,$$
$$x^4 - x^2 - 12 = 0,$$
$$\left(x^2 - 4\right)\left(x^2 + 3\right) = 0.$$

Vagyis $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

Ezeken a helyeken a közös függvényértéket visszahelyettesítéssel kapjuk:

$$f(-2) = g(-2) = 9, \qquad f(2) = g(2) = 13.$$

A metszéspontok: $M_1(-2; 9)$, $M_2(2; 13)$. Ezek távolsága:

$$M_1M_2 = \sqrt{(-2-2)^2 + (9-13)^2} = \sqrt{32} \approx 5{,}7.$$

A két metszéspont kb. 5,7 cm-re van egymástól.

b) A $g(x)$ függvény és az $f(x)$ függvény $[-2; 2]$ intervallumban pozitív, így a görbe alatti területek különbségét véve megkapjuk a kérdéses területet[1]. Ezt határozott integrállal tudjuk meghatározni:

$$T = \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + x + 15\right) dx - \int_{-2}^{2} \left(x^4 - 2x^2 + x + 3\right) dx = \int_{-2}^{2} \left(-x^4 + x^2 + 12\right) dx =$$
$$= \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + 12x\right]_{-2}^{2} = -\frac{2^5}{5} + \frac{2^3}{3} + 24 + \frac{(-2)^5}{5} - \frac{(-2)^3}{3} + 24 =$$
$$= -\frac{32}{5} + \frac{8}{3} - \frac{32}{5} + \frac{8}{3} + 48 = -\frac{64}{5} + \frac{16}{3} + 48 = 40{,}5\dot{3}.$$

Vagyis a folt területe kb. 40,53 cm^2.

8. *Adjuk meg a p valós paraméter értékét úgy, hogy az*

$$\begin{cases} xy + x + y + 2 = 0, \\ x - p = y(px + 1) \end{cases}$$

egyenletrendszernek pontosan egy valós $(x; y)$ számpár legyen a megoldása. (*16 pont*)

Megoldás. Mindkét egyenletből kifejezzük az xy-t:

$$xy = -x - y - 2, \quad \text{illetve} \quad pxy = x - y - p.$$

Ha $p = 0$, akkor a fenti egyenletből az $x = y$ adódna, de ezt behelyettesítve a másik egyenletbe nem kapunk megoldást.

Ha $p \neq 0$, akkor $xy = \dfrac{x - y - p}{p}$. A kapottak alapján:

$$\frac{x - y - p}{p} = -x - y - 2,$$
$$x - y - p = -px - py - 2p,$$
$$(p - 1)y = -x - px - p.$$

Ha $p = 1$, akkor pontosan egy számpár a megoldása az egyenletrendszernek:

$$x = -\frac{1}{2}, \qquad y = -3.$$

Ha $p \neq 1$, akkor $y = \dfrac{-x - px - p}{p - 1}$. Ezt visszahelyettesítjük az eredeti egyenletrendszer első egyenletébe:

$$\frac{x(-x - px - p)}{p - 1} + x + \frac{-x - px - p}{p - 1} + 2 = 0.$$

[1] Az f és g függvények grafikonja közötti terület a $[-2; 2]$ intervallumban:

$$\int_{-2}^{2} g(x) - f(x)\, dx.$$

Szorozzunk $(p-1)$-gyel, végezzük el a beszorzásokat, összevonásokat és rendezzük a következő alakra:

$$(p+1)x^2+(p+2)x+(2-p)=0.$$

Ha $p=-1$, akkor pontosan egy számpár a megoldása az egyenletrendszernek:

$$x=-3, \qquad y=-\frac{1}{2}.$$

Ha $p\neq -1$, akkor az egyenlet másodfokú. Egyféle x-et akkor kapunk, ha a diszkrimináns nulla:

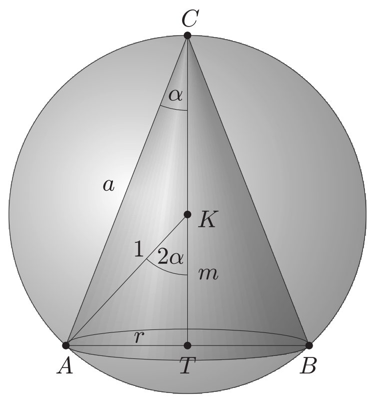
$$D=(p+2)^2-4(p+1)(2-p)=5p^2-4=0.$$

Ez $p_1=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, vagy $p_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$ esetén következik be.

Tehát a p lehetséges értékei: $-1, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1$.

9. *Az egységsugarú gömbbe olyan kúpot írunk, amelyben a tengely és az alkotó szöge α. Adjuk meg a kúp felszínét és térfogatát* $\sin\alpha$ *függvényében.* (*16 pont*)

Megoldás. Készítsünk *vázlatrajzot* a térbeli ábra tengelyre illeszkedő síkmetszetéről.



A kerületi és a középponti szögek közötti összefüggést használva, ha $ACT\sphericalangle=\alpha$, akkor $AKT\sphericalangle=2\alpha$. Az ATK derékszögű háromszögben:

$$r=\frac{r}{1}=\sin 2\alpha.$$

Az ATC derékszögű háromszögben $\sin\alpha=\frac{r}{a}$, vagyis

$$a=\frac{r}{\sin\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha}=2\cos\alpha.$$

Az ATC derékszögű háromszögben $\operatorname{tg}\alpha=\frac{r}{m}$, vagyis

$$m=\frac{r}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=2\cos^2\alpha.$$

Most már felírhatjuk a felszínt és a térfogatot α segítségével. A feladat kérésének megfelelően a kapott kifejezéseket úgy alakítjuk, hogy csak szinusz szögfüggvény maradjon bennük:

$$A=\pi r(r+a)=\pi\sin 2\alpha(\sin 2\alpha+2\cos\alpha)=2\pi\sin\alpha\cos\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos\alpha)=$$
$$=4\pi\sin\alpha\cos^2\alpha(\sin\alpha+1)=4\pi\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)(\sin\alpha+1).$$

$$V=\frac{r^2\pi m}{3}=\frac{2\pi\sin^2 2\alpha\cos^2\alpha}{3}=\frac{8\pi\sin^2\alpha\cos^2\alpha\cos^2\alpha}{3}=\frac{8\pi\sin^2\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)^2}{3}.$$