[1]

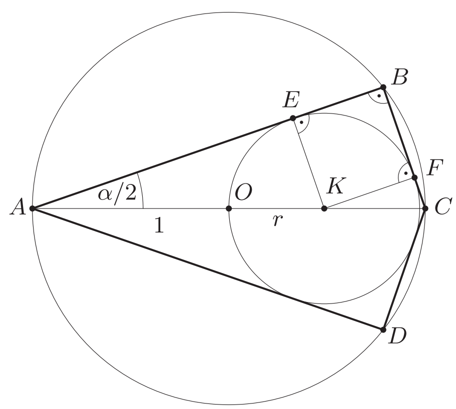
A telitalálatos szelvény:

$$1, 2, X, \quad X, 2, X, \quad 2, X, 1, \quad 2, 2, X, \quad 2, 2.$$

A legtöbb (13) találatot *Fehér Zsombor* (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 12. évf.) és *Sal Kristóf* (Budapesti Fazekas M. Ált. Isk. és Gimn., 10. évf.) érte el.

Az alábbiakban rövid útmutatást adunk a feladatok megoldásához.

1. $ABCD$ deltoidunk húrnégyszög, ezért az AC szimmetriatengelye a körülírt körben átmérő, továbbá a B csúcsnál levő szöge derékszög. Legyen még a körülírt kör középpontja O, a beírt köré – szintén a tengelyen – K, és legyen $KC < KA$, sugaraik 1, illetve r, végül a beírt kör érintési pontja az AB oldalon E, a BC-n F.



A KE és a KF sugár párhuzamos a BC, illetve a BA oldallal, ezért AKE és KCF hasonló derékszögű háromszögek:

$$AE : KE = KF : CF,$$
$$AE \cdot CF = KE \cdot KF = r^2.$$

Az átfogók pedig $1 + r$, illetve $1 - r$, mert O rajta van a beírt körön és K az OC sugáron, így

$$AE \cdot CF = \sqrt{(1+r)^2 - r^2} \cdot \sqrt{(1-r)^2 - r^2} = \sqrt{(1+2r)(1-2r)}.$$

Ezeket egybevetve r^2-re másodfokú egyenletet kapunk, és abból

$$1 - 4r^2 = r^4, \qquad r = \sqrt{\sqrt{5} - 2} \approx 0{,}4859,$$

(r^2 másik értéke negatív).

Most már a deltoid A csúcsánál levő α szögre

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{1+r}, \qquad \alpha \approx 38{,}17^\circ,$$

a C-nél levő szög ennek kiegészítő szöge, vagyis ennél nagyobb.

2. A rugókat egyforma nagyságú erő feszíti, és ha ez nem 3 N lenne, akkor a középső rugó végpontjai nem lennének egyensúlyban.

3. Jelöljük T-vel a keresett telefonszámot. T 3-mal osztva 0, 1 vagy 2 maradékot adhat. Tudjuk azt is, hogy T páratlan, tehát 4-gyel osztva páratlan maradékot ad. Eszerint a szóban forgó közös maradék 1.

A feltételből következik, hogy $T - 1$ osztható 3-mal, 4-gyel, 7-tel, 9-cel, 11-gyel és 13-mal. Egyelőre csak annyit használunk föl, hogy $T - 1$ osztható $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$-gyel: 1001 hatjegyű többszörösei $ABCABC$ alakúak. Mivel T páratlan, nem végződik 0-ra, és így $T - 1$ és T csak az utolsó számjegyükben különböznek. Így $A = 7$, $B = 2$, tehát

$$T - 1 = 72\ C\ 72\ C.$$

A 9-cel való oszthatóság miatt $T - 1$ jegyeinek összege is osztható 9-cel. Mivel

$$7 + 2 + C + 7 + 2 + C = 18 + 2C,$$

[1]A kérdések a 26. oldalon találhatók.

így $2C$ is 9 többszöröse. Ez csak a $C=0$ vagy a $C=9$ esetben lehetséges, de $T-1$ utolsó jegye páros. Ha $C=0$, akkor valamennyi feltétel teljesül, azaz $T=720\,721$.

4. A tömegközéppont mindkét esetben

$$x=\frac{\ell}{4}\,\frac{\varrho_2-\varrho_1}{\varrho_2+\varrho_1}$$

távolságra lesz az ℓ hosszú, ϱ_1 és ϱ_2 sűrűségű részekből álló pálca középpontjától.

5. Az alábbi egyenletrendszert kell megoldanunk, ahol x a 10, y a 20, z az 50, végül t a 100 forintos érmék számát jelöli:

$$x+y+z+t=5, \tag{1}$$
$$10x+20y+50z+100t=170. \tag{2}$$

A második egyenlet tizedrészéből kivonva az elsőt, kapjuk az eredetivel ekvivalens

$$x+y+z+t=5, \tag{1}$$
$$y+4z+9t=12 \tag{3}$$

egyenletrendszert.

A megoldások nem negatívak, így (3) alapján $t\le 1$. Két esetet különböztetünk meg, aszerint, hogy $t=1$ vagy $t=0$.

a) Ha $t=1$, akkor egyenletrendszerünk így alakul:

$$x+y+z=4, \tag{1a}$$
$$y+4z=3. \tag{3a}$$

(3*a*) alapján $z<1$, így $z=0$, és $y=3$, végül (1*a*) szerint $x=1$.

b) Ha $t=0$, akkor egyenletrendszerünk:

$$x+y+z=5, \tag{1b}$$
$$y+4z=12. \tag{3b}$$

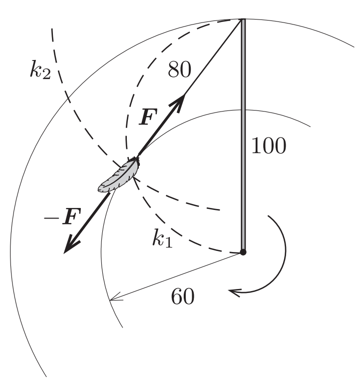
(3*b*) alapján $y=12-4z$, emiatt y osztható 4-gyel. Mivel (1*b*) szerint $y\le 5$, így $y=4$, vagy $y=0$. Ha $y=4$, akkor $z=2$, de (1*b*)-ből $y+z\le 5$, tehát így nem kapunk gyököt.

Ha $y=0$, akkor $z=3$, így (1*b*)-ből $x=2$.

Minden lehetőséget végignéztünk, így az egyenletrendszernek két megoldása van. Ezek:

$$\begin{array}{llll} x_1=1; & y_1=3; & z_1=0; & t_1=1,\\ x_2=2; & y_2=0; & z_2=3; & t_2=0. \end{array}$$

6. Ha a tollpihe valamilyen állandósult pályán mozog, akkor ez csak kör lehet, hiszen ilyenkor a tollpihe az ostornyéllel együttforgó koordináta-rendszerből szemlélve *áll.* A tollpihe elhanyagolhatóan kicsi tömege miatt a Newton-egyenletben a nehézségi erő és ma helyébe nullát írhatunk. A mozgásegyenlet tehát erre az állításra egyszerűsödik: a cérnaszálban ható erő és a közegellenállási erő eredője *nulla.*

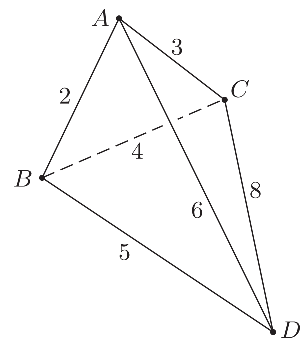


A cérnaszál egyenese a tollpihe pályakörének érintője. A pályakör sugarát az *ábrán* látható ($R=100$ cm átmérőjű) k_1 Thalész-kör és az ostornyél mozgásban levő vége körüli $L=80$ cm sugarú k_2 kör metszéspontja adja meg; nagysága:

$$r=\sqrt{R^2-L^2}=60\ \text{cm}.$$

(Ha a cérna hosszabb lenne, mint a pálca, akkor a tollpihének *nem* alakulhatna ki stabil, állandósult pályája.)

7. Próbáljunk meg tetraédert építeni az adott élekből. Nem szerepelhetnek ugyanabban a háromszögben a 2 cm-es és a 8 cm-es élek, hiszen a 2 cm-es élt a többi négy közül még a legnagyobb, a 6 cm-es él sem egészíti ki 8 cm-nél hosszabbra, márpedig egy háromszögben két oldal összege nagyobb a harmadiknál. Jelöljük a 2 cm-es él végpontjait A-val, B-vel, a 8 cm-eséit C-vel, D-vel, tudjuk már, hogy ezek különbözőek.



A többi 4 él mindegyikének az egyik végpontja az A, B, a másik a C, D pontok közül való. Válasszuk úgy a betűzést, hogy a 3 cm-es él két végpontja A és C legyen. Az ABC háromszög harmadik oldala, BC most már csak a 4 cm-es él lehet, hiszen a másik kettő mellett az $AB + AC = 5$ cm-es összeg túl kicsi lenne. Ugyancsak kevés az 5 cm-es él az ACD háromszög harmadik oldalának, így $AD = 6$, $BD = 5$. Ezek mellett az ABD háromszögben $AD = 6$ cm, $AB + BD = 7$ cm, a BCD háromszögben $CD = 8$ cm, $BC + BD = 9$ cm, tehát a keresett tetraéder valóban létrejön.

Tegyük fel most, hogy az adott elemekből ketten is felépítették a keresett tetraédert. Betűzzük az első tetraéder csúcsait a fenti meggondolás szerint A-val, B-vel, C-vel, D-vel, a másodikét A'-vel, B'-vel, C'-vel, D'-vel, ekkor tehát

$$AB = A'B',\ AC = A'C',\ BC = B'C',\ AD = A'D',\ BD = B'D',\ CD = C'D'. \tag{1}$$

A második $A'B'C'$ lapja egybevágó az első ABC lapjával, tehát ráhelyezhető úgy, hogy A' az A-ra, B' a B-re, C' a C-re kerüljön. Ezután a D' pont rendre ugyanolyan messze lesz az A, B, C pontoktól, mint a D. Ha D és D' azonosak, készen vagyunk, ha nem, tekintsük a DD' szakaszt. Az A, B, C pontok mindegyike egyenlő távolságra van ennek a végpontjaitól, tehát ezek a pontok benne vannak a szakasz felezőpontján átmenő, a szakaszra merőleges S síkban. Így ha az $ABCD$ tetraédert S-re tükrözzük, az átmegy az $ABCD'$ tetraéderbe. A két tetraéder tehát mindig egybevágó.

8. A lencsén átjutó fénysugarak a síktükrön visszaverődve mégegyszer áthaladnak a lencsén, éppen úgy, mintha két 6 dioptriás lencse lenne egymás mellett. Ezek dioptriaszáma összeadódik, tehát 12 lesz.

9. Tegyük föl, hogy a lift úgy mozgott, hogy maximális utat tett meg. Ekkor minden megállás után irányt változtatott. Ha ugyanis az i-edik, j-edik szintekre egymás után, irányváltoztatás nélkül érkezett volna, akkor az i-edik szinten való megállást kihagyva, majd az út befejezése után ide visszatérve, az így módosított út hosszabb, mint a lift által megtett út, amiről pedig feltettük, hogy maximális.

Jelölje m_i az i-edik megállás szintjét, $i = 1, 2, \dots, 10$. A lift által megtett út

$$\begin{aligned}&m_1 + (m_1 - m_2) + (m_3 - m_2) + (m_3 - m_4) + \ldots + (m_9 - m_{10}) =\\ &= 2\big[(m_1 + m_3 + m_5 + m_7 + m_9) - (m_2 + m_4 + \ldots + m_8)\big] - m_{10}.\end{aligned}$$

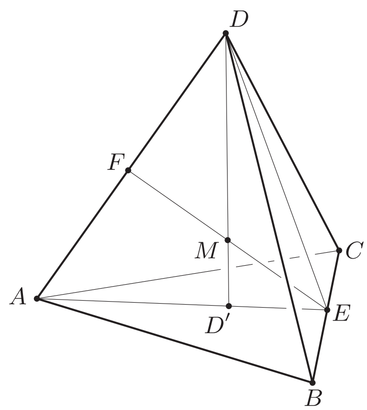
Látható, hogy a megtett út akkor maximális, ha a fenti összegben a 10, 9, 8, 7, 6 szintek pozitív, a megmaradó szintek negatív előjellel szerepelnek. Mivel a kivonandók közül m_{10} együtthatója a legkisebb, ezért $m_{10} = 5$, vagyis a lift végül az 5-dik szinten állt meg. A további m_i értékek – a fenti megszorítás mellett – tetszőlegesek lehetnek. A fenti megszorításnak eleget tevő m_i értékekhez tartozó maximális úthossz 220 m.

Megjegyzések. 1. A megoldásból nyilvánvaló, hogy a lift nemcsak egyetlen módon teheti meg a maximális 220 m-t. Az ilyen utak száma $5! \cdot 4! = 2880$.

2. A feladat könnyen általánosítható n emeletes házra. Ekkor a lift maximálisan $2n(n+1)$ méternyi utat tesz meg.

10. A rugalmas ütközések és a ferde hajítások összefüggéseinek felírása után – elég hosszú számolással – belátható, hogy a parabolák fókuszpontjai az ejtési ponton átmenő, 2α meredekségű egyenesen helyezkednek el. Célszerű a labda mozgását a lejtővel párhuzamos és arra merőleges tengelyekkel rendelkező koordinátarendszerben tárgyalni. A lejtőre merőleges irányban a labda úgy mozog, mintha a nehézségi gyorsulás $g \cos\alpha$ lenne; a felpattanások magassága és az ütközések közötti idő pedig minden ütközés után ugyanakkora. A lejtővel párhuzamos irányban a labda egyenletesen gyorsulva mozog, gyorsulása $g \sin\alpha$.

11. Jelöljük a tetraéder csúcsait A, B, C és D-vel. Mivel a tetraéder szabályos, bármely magasságvonala a szemközti szabályos háromszöget a körülírt körének középpontjában metszi. A magasságvonal körül $120°$-kal elforgatva a tetraédert, önmagába megy át. Ez a forgatás a tetraéder köré, a tetraéderbe írt gömböt, valamint az élérintő gömböt is önmagába viszi át, emiatt mindhárom gömbnek a középpontja a tetraéder magasságpontja, M.



Jelöljük a D csúcsnak az ABC síkra való merőleges vetületét D'-vel. A DD' magasságvonal tartalmazza a tetraéder M magasságpontját és MD' a tetraéderbe írható gömb sugarával egyenlő. Érintse az élérintő gömb az AD élt F-ben, a BC élt E-ben. Így $MF \perp AD$ és $ME \perp BC$, továbbá $ME = MF$ és nyilván F felezi AD-t, E felezi BC-t, hiszen $MD = MA = MC = MB$ a tetraéder köré írt gömb sugarával egyenlő. A DEA háromszög egyenlő szárú ($ED = EA$) és MF merőlegesen felezi AD-t, így át kell, hogy menjen a szemközti csúcson, E-n, azaz E, M és F egy egyenesbe esik. Ebből következik, hogy EMD' és DMF háromszögek M csúcsnál levő szögei csúcsszögek, tehát egyenlők, s mivel $MD'E$ és MFD szögük derékszög, így hasonlóak és megfelelő oldalaikra:

$$\frac{EM}{MD'} = \frac{DM}{MF}, \quad ME = MF \quad \text{miatt} \quad EM^2 = MD' \cdot DM.$$

12. Ha a telített vízgőz térfogatát *lassan* csökkentjük, a hőmérséklete állandó marad, a nyomása sem tud megváltozni, mert az csak a hőmérséklettől függ, így a gáztörvény szerint a részecskeszámnak kell csökkennie. A lassan összenyomott gőz egy része tehát *kicsapódik*.

Ha a térfogatot olyan *hirtelen* növeljük meg, hogy nincs idő számottevő hőcserére a vízgőzt tartalmazó tartály és a környezete között, akkor a hőmérséklet lecsökken (adiabatikus tágulás). Az új, alacsonyabb hőmérséklethez tartozó telítési gőznyomás kisebb lesz, mint az eredeti, sőt, annak ellenére, hogy a térfogat nő, a gőz egy része *kicsapódik*.

A gőz kicsapódása tehát a térfogat csökkentésével és növelésével egyaránt előidézhető, a térfogatváltozás tényleges hatása a folyamat sebességétől függ.

13. Az *ábrán* 1-től 25-ig megszámoztuk az 5×5-ös tábla mezőit.

1	20	9	14	3
10	15	2	19	24
21	8	25	4	13
16	11	6	23	18
7	22	17	12	5

Könnyen ellenőrizhető, hogy ha egy ló az 1. számú mezőről kiindulva mindig a soron következő számú mezőre lép, akkor 24 lépésben minden mezőt érint. Így ha 13-nál több lovat állítunk fel az 5×5-ös táblára, akkor ezek közt feltétlenül lesz legalább kettő, amelyek szomszédos sorszámú mezőkre kerülnek, tehát a számozás tulajdonsága miatt ütik egymást. Az 5×5-ös táblán tehát 13 ló elhelyezhető a kívánt módon (minden páratlanadik mezőn egy), annál több már nem.

13+1. Egy általános érvényű tétel szerint ha egy (F_1) zárt felület sehol nem „lóg ki" egy másik (F_2) felület által határolt térrészből, akkor a nekik megfelelő alakú fémtestek kapacitására fennáll: $C_1 < C_2$. (A tétel bizonyításához a feltöltött kondenzátor elektrosztatikus energiáját érdemes vizsgálni, miközben a kisebb felületet apró lépésekben a másiknak megfelelő alakúra „kalapáljuk".)

A fémkocka éppen „belefér" a megadott méretű fémgömbbe, emiatt a kocka kapacitása biztosan kisebb, mint a fémgömbé.