I. megoldás. 1. Legyen E egy pont e-nek a testbeli szakaszán, és jelöljük az EDA, EDB, EDC szögeket sorra α, β, γ betűvel; ezekre nyilvánvalóan $0° < \alpha, \beta, \gamma < 90°$. A kérdéses távolságösszeg:

$$s = a\ \sin\alpha + b\ \sin\beta + c\ \sin\gamma. \tag{1}$$

Válasszuk DE-t hosszegységnek, így vetületei a D-ből kifutó éleken rendre $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, és az ezek végpontjaival meghatározott téglatest testátlójaként

$$DE^2 = 1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = (1-\sin^2\alpha) + (2 - \sin^2\beta - \sin^2\gamma),$$

amiből minden szóba jövő α, β, γ szöghármasra

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2. \tag{2}$$

Írjuk a bal oldalt a bizonyítandó egyenlőtlenség 2-es tényezője helyére:

$$a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma \leqq \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma)}.$$

A bal oldal pozitív, így az állítás ekvivalens azzal az egyenlőtlenséggel, amit négyzetre emeléssel kapunk; abban mindent a jobb oldalra gyűjtünk, és észrevesszük a lehetőségeket a teljes négyzetté alakításra:

$$0 \leqq (a\sin\beta - b\sin\alpha)^2 + (b\sin\gamma - c\sin\beta)^2 + (c\sin\alpha - a\sin\gamma)^2.$$

Ennek helyessége pedig nyilvánvaló.

2. Egyenlőségről csak akkor lehet szó, ha a jobb oldalon mindegyik zárójelben 0 áll; tovább ennek egzisztenciáját vizsgáljuk, a test éleire az $a \leqq b \leqq c$ nagyságviszonyt alapul véve. A zárójelekbeli különbségek eltűnéséből:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \lambda, \quad \text{állandó } (>0),$$

tehát ha az adott téglatesthez van olyan e egyenes, amelyre s eléri felső korlátját, arra $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma$, elég tehát azt biztosítanunk, hogy $\sin\gamma < 1$ legyen.

λ meghatározása céljára írjuk be (2)-be a $\sin\gamma = \lambda c, \ldots$ kifejezéseket, és vegyük észre, hogy az állításban is szereplő $\left(a^2+b^2+c^2\right)$ kifejezés téglánk d testátlójának négyzete. Így $\lambda = \sqrt{2}/d$, és követelésünk

$$\sin\gamma = \frac{\sqrt{2}c}{d} = \sqrt{\frac{2c^2}{a^2+b^2+c^2}} = \sqrt{\frac{2}{1+\dfrac{a^2+b^2}{c^2}}} < 1,$$

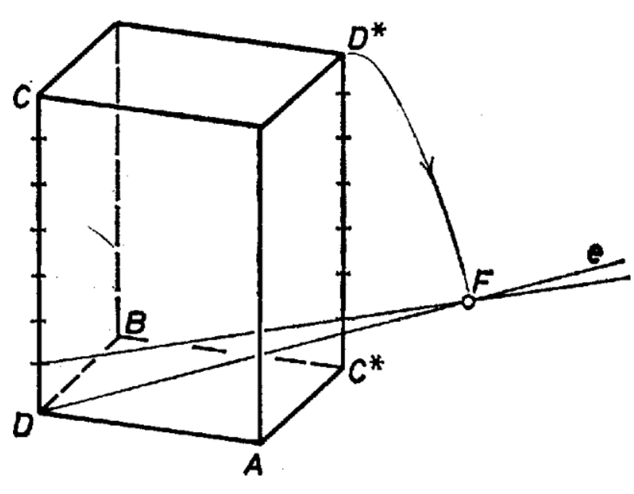
ez pedig teljesül, ha $a^2+b^2 > c^2$, vagyis ha a vizsgált téglatest leghosszabbik éle kisebb, mint a rá merőleges lap átlója.

Ekkor

$$\cos\alpha = \frac{1}{d}\sqrt{b^2+c^2-a^2}, \quad \cos\beta = \frac{1}{d}\sqrt{c^2+a^2-b^2}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{d}\sqrt{a^2+b^2-c^2},$$

ezek közül bármelyik kettő meghatározza e helyzetét. (Például DA és DB mint tengely körüli α, ill. β nyílásszögű kúpfelületeknek negyede esik a D-nél levő testszöglet [triéder] belsejébe, ezek egyetlen közös alkotója lesz e.)

Nyilvánvalóan megfelel a talált feltételeknek a kocka, és ekkor a testátló egyenese az, amelyre a legnagyobb a távolságösszeg. – De hogy ne mindig csak a legtriviálisabb példákra gondoljunk, vegyük még a csak kevéssel általánosabb $a = b = 5$, $c = 7$ esetet (és állítsuk c-t függőlegesnek). Ekkor $\alpha = \beta$, ezért a maximumot adó egyenes a DCD^*C^* függőleges átlós síkban van, ahol a * (betűvel együtt) az illető csúcs tükörképét jelenti a test centrumára. Továbbá $\cos\gamma = 1/d$, és a félegyenes egy további, F pontját az ábra szerint tűzhetjük ki.



II. megoldás. Jelöljük az e egyenesnek az AD, BD, CD éllel bezárt szögét rendre α-val, β-val, γ-val. Ekkor az A, B, ill. C csúcs távolsága az e egyenestől rendre

$$a \cdot \sin\alpha, \quad b \cdot \sin\beta, \quad c \cdot \sin\gamma.$$

Tekintsük a következő két vektort:

$$\mathbf{f} = (a, b, c), \qquad \mathbf{h} = (\sin\alpha, \sin\beta, \sin\gamma).$$

Jelöljük az $\mathbf{f}$ és $\mathbf{h}$ által bezárt szöget φ-vel, így a két vektor skaláris szorzata egyfelől éppen a távolságösszeg, másfelől az ismert képlet alapján:

$$(*) \qquad \mathbf{f} \cdot \mathbf{h} = a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma = |\mathbf{f}| \cdot |\mathbf{h}| \cdot \cos\varphi = \\ = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma} \cdot \cos\varphi.$$

Mit mondhatunk a $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma$ kifejezésről? Legyen E az e egyenes tetszőleges pontja, és vetülete a DA, DB, DC élek egyenesére rendre E_A, E_B, E_C. Pitagorasz tételét felhasználva

$$ED^2 = DE_A^2 + DE_B^2 + DE_C^2 = DE^2\cos^2\alpha + DE^2\cos^2\beta + DE^2\cos^2\gamma$$
$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma.$$

Fölhasználva a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ azonosságot, kapjuk

$$2 = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma.$$

Ezt $(*)$-ba behelyettesítve és fölhasználva, hogy $\cos\varphi \leqq 1$, a bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2) \cdot 2} \geq a \ \sin \ \alpha + b \ \sin \ \beta + c \ \sin \ \gamma.$$

Egyenlőség akkor állhat fenn, ha $\cos\varphi = 1$, vagyis az $\mathbf{f}$ és $\mathbf{h}$ vektorok egyező irányúak. Mikor lehetséges ez? Ha van olyan t pozitív valós szám, amelyre

$$\mathbf{f} = \mathbf{h} \cdot t$$

vagyis

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = t.$$

Ez például teljesül, ha $a = b = c$ (vagyis a téglatest kocka) és $\sin\alpha = \sin\beta = \sin\gamma$ (vagyis e éppen a kocka testátlójának egyenese).

Ebből természetesen nem következik, hogy csak ebben az esetben állhat fönn egyenlőség. Csak annyit mutattunk meg, amennyit a feladat kért: lehetséges egyenlőség.