A 2014. évi Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny elméleti feladatainak megoldása[1]

1.A. A hűtőgép által időegységenként elvont hő megegyezik a hővezetéssel oda visszakerülő hővel, ez utóbbi pedig a hőmérsékletkülönbséggel arányos. Ebből és a hűtőgép Carnot-hatásfokából megkaphatjuk, hogy $T_2' \approx 122$ K. (Feltételezzük, hogy a hűtógép a maximális fokozaton mindkét esetben ugyanakkora teljesítménnyel működik.)

1.B. A diódán áthaladó töltés: $Q = \dfrac{\mu_0 m}{2rR}$.

1.C. Az állónak tekinthető hidrogénmagoknak ütköző protonok akkor képesek a $p^+ + p^+ \longrightarrow p^+ + n^0 + \pi^+$ folyamatot létrehozni, ha a beeső protonok mozgási energiája legalább

$$E_{\min} = \frac{(m_p + m_n + m_\pi)^2 - 4m_p^2}{2m_p} c^2 \approx 292 \text{ MeV}.$$

2.1. A Földnek a tengelye körüli forgásából származó sajátperdülete $5{,}9 \cdot 10^{33}\ \dfrac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$. A Földnek a Föld–Hold rendszer közös tömegközéppontja körüli keringéséből származó $N_{\text{pálya}}^{\text{Föld}}$ pályaperdülete a sajátperdületnél kb. 16-szor kisebb.

A Hold pályaperdülete $2{,}8 \cdot 10^{34}\ \dfrac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s}}$, sajátperdülete pedig kb. *százezerszer* kisebb.

2.2.

$$\frac{\Delta E^{\text{Föld}}}{\Delta E^{\text{Hold}}} \approx \frac{\Omega}{\omega} \approx \frac{1 \text{ hónap}}{1 \text{ nap}} \approx 30,$$

az árapálykeltő erők tehát elsősorban a Föld mozgási energiáját csökkentik, sokkal nagyobb mértékben, mint a Holdét.

2.3. A Föld mozgási energiája évente kb. 10^{19} J-lal csökken.

2.4. A Föld forgásának és a Hold keringésének szinkronizálódásakor a földi nap új hossza a jelenleginek kb. 47-szerese lesz.

2.5. A teljes szinkronizáció befejeződésekor a Föld és a Hold közötti távolság kb. 550 ezer km lesz.

3.1. Egy Q töltésű, M tömegű (homogén tömeg- és töltéseloszlású) forgó golyó mágneses momentuma és a sajátperdülete közötti arányossági tényező: $\gamma = Q/(2M)$.

3.2. A homogén mágneses mezőbe helyezett forgó, töltött golyó mágneses dipólmomentuma időben így változik:

$$\boldsymbol{m}(t) = m_0 \begin{pmatrix} \cos(\gamma B_0 t)\sin\varphi \\ \sin(\gamma B_0 t)\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

3.3. A müon mágneses momentumának a kezdeti irányával bezárt szöge:

$$\alpha(t) = \arccos\big(1 + \sin^2\varphi\big(\cos(\gamma_\mu B_0 t) - 1\big)\big).$$

3.4. A kérdéses w paraméter értéke $1/(4\pi)$.

3.5. $B_0 = 2\pi/(\gamma_\mu \tau)$, ahol γ_μ a müon megadott giromágneses faktora, τ pedig az oszcilláció periódusideje. A közölt ábráról leolvasható, hogy $\tau \approx 5 \cdot 10^{-8}$ s, így $B_0 = 0{,}15$ T.

3.6. A közölt ábráról leolvasható, hogy a beütésszám az első minimumnál kb. 4000 volt, majd 0,5 mikroszekundummal később mintegy 3200-ra csökkent. A csökkenés üteméből és az exponenciális bomlástörvényből megkapható, hogy a müonok felezési ideje:

$$T_\mu \approx \frac{0{,}5\ \mu\text{s} \cdot \ln 2}{-\ln\frac{3200}{4000}} \approx 1{,}6\ \mu\text{s}.$$

(A táblázatokban megtalálható pontosabb érték 1,52 μs.)

3.7. Az oszcilláló, de közben exponenciálisan csökkenő beütésszám:

$$N(t) \sim 2^{-t/T_\mu}\left(1 + \frac{1}{3}\sin^2\varphi\big(\cos(\gamma_\mu B_0 t) - 1\big)\right).$$

Ennek alsó és felső burkolója:

$$N_{\min} \sim 2^{-t/T_\mu}\left(1 - \frac{1}{3}\right), \qquad \text{illetve} \qquad N_{\max} \sim 2^{-t/T_\mu}\left(1 - \frac{\cos(2\varphi)}{3}\right).$$

A kettő hányadosa pl. a $t = 0$-nál leolvasható $N_{\min} \approx 4000$ és $N_{\max} \approx 7000$ adatokból számolva:

$$\frac{7000}{4000} = \frac{1 - \frac{\cos(2\varphi)}{3}}{1 - \frac{1}{3}}, \qquad \text{ahonnan} \qquad \cos(2\varphi) = -\frac{1}{2}.$$

Ezek szerint φ vagy 60°-hoz vagy 120°-hoz közeli érték lehet.

[1] A feladatok szövege a májusi számunkban jelent meg.