Az idei Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát július 2–14. között Kazahsztánban, az ország rohamosan fejlődő új fővárosában, Asztanában rendezték meg. A zsűri a verseny lebonyolítása előtt a régi főváros, Almaty közelében ülésezett.

A versenyen 97 ország 523 diákja indult. A verseny közben azonban Észak-Korea csapatát szabálytalan versenyzés miatt kizárták, így a versenyen végül 96 ország 517 versenyzőjének eredménye került kiértékelésre.

A legtöbb ország a megengedett maximális létszámú, 6 fős csapattal szerepelt; az alábbi listában az országnév után zárójelben tüntettem fel az adott ország versenyzőinek számát, ha ez hatnál kevesebb volt.

A résztvevő országok: *Albánia (4), Amerikai Egyesült Államok, Argentína, Ausztrália, Ausztria, Azerbajdzsán, Banglades (5), Belgium, Belorusszia, Bolívia (4), Bosznia-Hercegovina, Brazília, Bulgária, Ciprus, Costa Rica (3), Csehország, Dánia, Dél-Afrika, Dél-Korea, Ecuador, El Salvador (3), Elefántcsontpart (5), Észtország, Finnország, Franciaország, Fülöp-Szigetek (3), Görögország, Grúzia, Guatemala (2), Hollandia, Honduras (1), Hong Kong, Horvátország, India, Indonézia, Irán, Írország, Izland, Izrael (5), Japán, Kambodzsa, Kanada, Kazahsztán, Kína, Kirgizisztán, Kolumbia (4), Kuba (1), Kuwait (5), Lengyelország, Lettország, Litvánia, Luxemburg (3), Macedónia, Magyarország, Malajzia, Marokkó, Mexikó, Moldova, Mongólia, Montenegro (4), Nagy-Britannia, Németország, Nigéria (5), Norvégia, Olaszország, Oroszország, Örményország, Pakisztán (5), Panama (2), Paraguay (4), Peru, Portugália, Puerto Rico (2), Románia, Spanyolország, Sri Lanka, Svájc, Svédország, Szaud-Arábia, Szerbia, Szingapúr, Szíria, Szlovákia, Szlovénia, Tadzsikisztán, Tajvan, Thaiföld, Törökország, Trinidad és Tobago (5), Tunézia (2), Türkmenisztán, Új-Zéland, Ukrajna, Üzbegisztán, Venezuela (2), Vietnam.*

Először vett részt Elefántcsontpart csapata. A versenyen szokás szerint mindkét napon négy és fél óra alatt 3–3 feladatot kellett megoldani. (A feladatokat alább közöljük.) Mindegyik feladat helyes megoldásáért 7 pont járt, így egy versenyző maximális teljesítménnyel 42 pontot szerezhetett. A verseny befejezése után megállapított ponthatárok szerint aranyérmet a 27–42 pontot elért, ezüstérmet a 21–26 pontos, míg bronzérmet a 15–20 ponttal rendelkező tanulók szereztek. Dicséretben részesültek azok a versenyzők, akiknek 15-nél kevesebb pontjuk volt, de egy feladatot hibátlanul megoldottak.

A magyar csapatból

Nagy Donát (Szeged, Radnóti Miklós Gimn., 11. o.t.) 29 ponttal és
Nagy János (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 11. o.t.) 28 ponttal *aranyérmet,*
Éles András (Debrecen, Fazekas Mihály Gimn., 12. o.t.) 25 ponttal és
Dankovics Attila (Budapest, Veres Péter Gimn., 11. o.t.) 21 ponttal *ezüstérmet,*
Bodor Bertalan (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn., 12. o.t.) 15 ponttal pedig *bronzérmet* szerzett.
Mészáros András (Győr, Révai Miklós Gimn., 12. o.t.) 11 ponttal *dicséretben* részesült.

A magyar csapat vezetője *Pelikán József* (ELTE TTK, Algebra és Számelmélet Tanszék), helyettes vezetője *Dobos Sándor* (Fazekas Mihály Főv. Gyak. Gimn.) volt. *Kós Géza* (MTA SZTAKI, ELTE TTK) a problémakiválasztást előkészítő bizottság meghívott tagjaként vett részt az olimpián.

Az országok (nem-hivatalos) pontversenyében Magyarország a 13–14. helyen végzett. A csapatverseny élmezőnyének sorrendje így alakult (megszerzett pontszámaikkal):

1. Kína 197, 2. Oroszország 169, 3. USA 168, 4. Dél-Korea 156, 5–6. Kazahsztán és Thaiföld 148, 7. Japán 141, 8. Törökország 139, 9. Németország 138, 10. Szerbia 135, 11–12. Olaszország és Vietnam 133, **13–14. Magyarország** és Kanada **129,** 15. Ausztrália 128, 16–17. Irán és Románia 127, 18. Peru 124, 19. Tajvan 123, 20. Hong Kong 121, 21. Bulgária 118, 22–23. Szingapúr és Ukrajna 117, 24. Lengyelország 116, 25. Nagy-Britannia 114, 26. Üzbegisztán 112, 27. Belorusszia 110, 28. Azerbajdzsán 109, 29. Új-Zéland 106, 30–31. Franciaország és Indonézia 105.

Szeretnék köszönetet mondani a versenyzők tanárainak. Az alábbi felsorolásban minden tanár neve után monogramjukkal jelöltem azokat a diákokat, akik tanítványaik.

Beleznay Ferenc (NJ), *Csete Lajos* (MA), *Dobos Sándor* (BB, DA, ND, NJ), *Fazakas Tünde* (BB), *Hraskó András* (BB, NJ), *Juhász Péter* (DA), *Kovács Péter* (ÉA), *Mike János* (ND), *Pósa Lajos* (BB, DA, ÉA, MA, NJ), *Rácz Mihályné* (DA), *Remeténé Orvos Viola* (ÉA), *Schultz János* (ND), *Surányi László* (BB, NJ), *Zábrádiné Schmierer Emília* (MA).

Ugyancsak szeretnék külön köszönetet mondani Dobos Sándornak, mint a központi olimpiai előkészítő szakkör vezetőjének.

Az idei versenyen az 1. és 4. feladat kimondottan könnyű volt, viszont a 3. és a 6. feladat mellett az 5. is meglehetősen nehéznek bizonyult. Ez magyarázza, hogy az aranyérem alsó határa (27 pont) minden eddigi diákolimpia közül ezen az olimpián volt a legalacsonyabb.

Kazahsztán hatalmas területű, természeti szépségekben igen gazdag ország. Láttunk hatalmas hegyeket, tavakat és természetesen sztyeppét is. Kiemelkedő esemény volt a nomád lovasok bemutatója.

A következő diákolimpiát Hollandiában, Amszterdamban rendezik, 2011. július 12–24. között.

Az 51. Nemzetközi Matematikai Diákolimpia feladatai[1]

[1] Az olimpia honlapja: `http://www.imo2010org.kz/`.

Első nap

1. feladat. Határozzuk meg az összes olyan $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt, amelyre az $f\big([x]y\big) = f(x)\big[f(y)\big]$ egyenlőség teljesül minden $x, y \in \mathbb{R}$-re. (Itt $[z]$ a legnagyobb olyan egész számot jelöli, amely kisebb vagy egyenlő z-nél.)

2. feladat. Legyen I az ABC háromszög beírt körének középpontja, Γ pedig a háromszög körülírt köre. Az AI egyenes másik metszéspontja a Γ körrel legyen D. Legyen E a $\widehat{BDC}$ körív egy pontja, F pedig a BC szakasz egy pontja, amelyekre teljesül

$$BAF\sphericalangle = CAE\sphericalangle < \frac{1}{2}BAC\sphericalangle.$$

Legyen továbbá G az IF szakasz középpontja. Bizonyítsuk be, hogy a DG és EI egyenesek a Γ körön metszik egymást.

3. feladat. Legyen $\mathbb{N}$ a pozitív egész számok halmaza. Határozzuk meg az összes olyan $g\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$ függvényt, amelyre $\big(g(m)+n\big)\big(m+g(n)\big)$ teljes négyzet minden $m, n \in \mathbb{N}$-re.

Második nap

4. feladat. Legyen P egy pont az ABC háromszög belsejében. Az AP, BP és CP egyenesek másik metszéspontja az ABC háromszög Γ körülírt körével legyen rendre K, L és M. A Γ körhöz C pontban húzott érintő messe az AB egyenest az S pontban. Tegyük fel, hogy $SC = SP$. Bizonyítsuk be, hogy $MK = ML$.

5. feladat. A B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 dobozok mindegyikében kezdetben egy érme van. Kétféle megengedett lépés van:

1. *típusú lépés:* Választunk egy B_j nemüres dobozt, ahol $1 \le j \le 5$. Elveszünk egy érmét a B_j dobozból, és hozzáadunk két érmét a B_{j+1} dobozhoz.

2. *típusú lépés:* Választunk egy B_k nemüres dobozt, ahol $1 \le k \le 4$. Elveszünk egy érmét a B_k dobozból, és kicseréljük a B_{k+1} (esetleg üres) doboz tartalmát a B_{k+2} (esetleg üres) doboz tartalmával.

Állapítsuk meg, hogy ilyen lépések valamilyen véges sorozata segítségével elérhető-e, hogy a B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 dobozok mindegyike üres legyen, a B_6 doboz pedig pontosan $2010^{2010^{2010}}$ érmét tartalmazzon. (Definíció szerint $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.)

6. feladat. Legyen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ pozitív valós számok egy sorozata. Tegyük fel, hogy van egy olyan s pozitív egész, amellyel

$$a_n = \max\{a_k + a_{n-k} \mid 1 \le k \le n-1\}$$

teljesül minden $n > s$ egészre. Bizonyítsuk be, hogy léteznek olyan ℓ és N pozitív egészek, amikre $\ell \le s$, és $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ minden $n \ge N$-re.