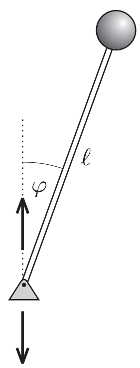
Ízelítő a Kunfalvi Rezső Olimpiai Válogatóverseny feladatsorából

Budapest, 2013. április 22–24.

Kapica-inga

Egy súlyos, kicsiny gömbből és egy hozzá képest elhanyagolható tömegű, egyik végén tengelyezett, ℓ hosszúságú merev rúdból ingát készítünk. Az inga legalsó helyzetében stabil egyensúlyban van, a legfölső helyzete viszont köz-ismerten instabil: innen elengedve azonnal eldől, akár egy hegyére állított ceruza. Ha azonban az inga felfüggesztési pontját függőlegesen, kis amplitúdóval, nagy frekvenciával rezgetjük, az inga legfelső, $\varphi = 0°$-os helyzete stabillá válik. A jelenség magyarázatát 1951-ben a Nobel-díjas szovjet fizikus, *Pjotr Kapica* adta meg. Ebben a feladatban a „fejenálló” inga stabilizálásához szükséges feltételeket fogjuk meghatározni kétféle időfüggésű rezgetés esetére.



A rész. Ebben a részben a felfüggesztési pontot függőlegesen úgy rezgetjük, hogy sebessége az idő függvényében periodikusan, háromszögjel szerint változzon. A rezgés periódusidejét T-vel jelölve a felfüggesztési pont gyorsulását tehát az

$$a(t) = \begin{cases} +a_0, & \text{ha} \quad \left(n - \frac{1}{4}\right)T < t < \left(n + \frac{1}{4}\right)T \\ -a_0, & \text{ha} \quad \left(n + \frac{1}{4}\right)T < t < \left(n + \frac{3}{4}\right)T \end{cases}$$

függvénnyel adhatjuk meg, ahol n egész szám, a pozitív irányt pedig függőlegesen felfelé választottuk. A gravitáció hatását a **A.1.**, **A.2.** és **A.3.** részfeladatokban teljesen hanyagoljuk el!

A.1. Az ingát a legfelső helyzetéből kicsiny $\varphi_0 \ll 1$ szöggel kitérítjük, majd a $t = 0$ időpillanatban kezdősebesség nélkül elengedjük. Ábrázoljuk az inga φ kitérését az idő függvényében és határozzuk meg a kezdőállapothoz viszonyított maximális $\Delta\varphi$ szögeltérülést! Tegyük fel, hogy $\Delta\varphi \ll \varphi_0$!
Útmutatás: Üljünk bele a felfüggesztési ponttal együttmozgó koordináta-rendszerbe!

A.2. Az előző részfeladatban szereplő közelítéseket felhasználva határozzuk meg az inga helyzetét jellemző φ szög egy periódusra vett $\langle\varphi(t)\rangle$ időátlagát, valamint az ettől az értéktől való átlagos eltérést, azaz a $\big\langle\big|\varphi(t) - \langle\varphi(t)\rangle\big|\big\rangle$ mennyiséget!

A.3. Az előző részfeladat eredményét felhasználva határozzuk meg az ingára ható forgatónyomaték egy periódusra vett $\langle M\rangle$ időátlagát a felfüggesztési ponthoz rögzített vonatkoztatási rendszerben!

A.4. Most vegyük figyelembe a gravitáció hatását is! Feltételezhetjük, hogy $g \ll a_0$, így az inga gravitáció hatására bekövetkező szögkitérése sokkal kisebb, mint a **A.3.** részfeladatban meghatározott $\Delta\varphi$ érték. Írjunk föl azt az egyenletet, amely leírja az inga egy periódusra vett átlagos $\langle\varphi\rangle$ kitérésének időbeli változását! (Az egyenletet nem kell megoldani.)

A.5. Az előző részfeladatban kapott egyenlet felhasználásával határozzuk meg, milyen egyenlőtlenségnek kell fennállnia g, ℓ, a_0 és a rezgés T periódusideje között ahhoz, hogy az inga legfelső helyzete stabil legyen!

B rész. Ebben a részben a felfüggesztési pontot függőlegesen harmonikus időfüggéssel rezgetjük úgy, hogy gyorsulását az idő függvényében az $a(t) = a_0 \sin(\omega t)$ kifejezés adja meg.

B.1. Írjunk föl egy egyenletet, amely leírja az inga φ kitérésének időbeli változását a felfüggesztési ponthoz rögzített koordináta-rendszerben! Az egyenletet nem kell megoldani.

B.2. Tegyük fel, hogy az inga $\varphi(t)$ szögkitérésének időfüggése két részre bontható: egy gyorsan oszcilláló részre és egy lassan változó, nem oszcilláló részre, azaz

$$\varphi(t) = A(t)\sin(\omega t) + B(t),$$

ahol $A(t)$ és $B(t)$ sokkal lassabban változó függvények, mint $\sin(\omega t)$. Ezt a próbamegoldást a **B.1.** részfeladatban kapott egyenletbe helyettesítve és a $g \ll a_0 \ll \ell\omega^2$ közelítéseket alkalmazva fejezzük ki $A(t)$-t $B(t)$, a_0, ω és g felhasználásával!

B.3. Az eddigi közelítéseket alkalmazva írjunk föl egy egyenletet $B(t)$ időbeli változására, majd g, ℓ és a_0 segítségével fejezzük ki, milyen egyenlőtlenségnek kell fennállnia az ω körfrekvenciára ahhoz, hogy az inga legfelső helyzete stabil legyen!