Matematika és fizika totó megoldása[1]

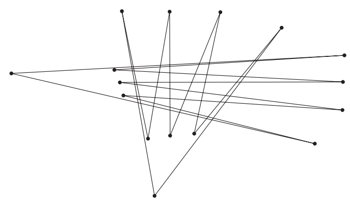
A telitalálatos szelvény:

$$2, X, X, \quad 1, 1, X, \quad X, X, X, \quad 2, 2, 1, \quad 1, 1.$$

A legtöbb, 11 *találatot* Szabó Attila *(Pécs, Leőwey Klára Gimnázium,* 12. *évf.) érte el.* 9 *találatos szelvényt adott be* Katona Dániel *(Budapest, Berzsenyi Dániel Gimnázium,* 10. *évf.) és* Mázik László *(Révkomárom, Selye János Gimnázium, érettségizett).*

1. A függőlegesen lógó rugót a tetejénél a teljes súlya, a legaljánál pedig semmi nem terheli; az átlagos húzóerő tehát a súly fele. A mindkét végénél felfüggesztett rugó végeinél ható erő függőleges komponense a súly fele, és ugyanekkora a vízszintes komponens is. A vízszintes erőkomponens mindenhol ugyanakkora, így a rugót feszítő erő (egyetlen pont kivételével) mindenhol nagyobb, mint a rugó teljes súlyának fele. A rugó megnyúlása a feszítőerővel arányos, ez a végeinél felfüggesztett, ívesen belógó slinky-rugónál biztosan *nagyobb,* mint a függőlegesen lógónál.

2. Ehhez hasonló elrendezésben két 2012-szögnél is minden oldal minden oldalt metszeni fog. Az *ábra* szerinti elrendezésben a 8-szögnél $8 \cdot 8$, a 2012-szögnél pedig $2012 \cdot 2012 = 4\,048\,144$ metszéspont keletkezik.



3. Ha a korong forgása nagyon lelassulna, de a középpontja még számottevő sebességgel mozogna, akkor a korong különböző részeire ható súrlódási erők forgatónyomatékai kiegyenlítenék egymást, tehát a forgás sebessége nem csökkenne tovább. Hasonlóan, ha a transzlációs mozgás már majdnem teljesen leállna, de a korong még számottevően forogna, a súrlódási erők eredője gyakorlatilag nullává válna, így a tömegközéppont mozgása nem lassulhatna tovább. Eszerint a korong egyik mozgásformája sem szűnhet meg hamarabb, mint a másik; a haladó mozgás és a forgás *egyszerre* állhat csak meg.

4. Legalább 7 ceruzát kell találomra kihúznom ahhoz, hogy biztosan legyen közöttük két különböző színű. Ebből megtudhatom, hogy a legtöbb azonos színű ceruzából 6 darab van – hiszen „legrosszabb esetben” kihúzom ezt a hatot, de aztán hetedikre már egy másik színt.

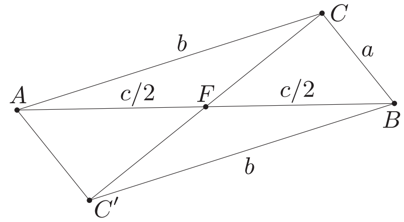
Legalább 11 ceruza véletlen kihúzása kell ahhoz, hogy biztosan kapjak három különböző színt. Megint a legkevésbé szerencsés esetben kihúzok 10 ceruzát – amiből 6 az egyik és akkor 4 a másik legnagyobb elemszámú – és azután húzom ki biztosan a harmadik színt. Tehát a második legtöbb színű ceruzából 4 darab van.

Hasonló módon okoskodva 13 húzásból az következik, hogy a harmadik legtöbb szín $12 - 6 - 4 = 2$, tehát az egyik színből 2 darab ceruza van.

Mivel mindegyik ceruzából más számú van, így a legkevesebb számú ceruzából csak 1 darab lehet.

5. A gázmolekulák átlagos távolsága (normál állapotban) nagyságrendileg kb. 10-szerese a molekulák méretének. A csillagok távolsága fényév (kb. 10^{13} km) nagyságrendű, a csillagok átmérője pedig néhány millió km. Ezek aránya 10 millió, sokkal nagyobb, mint a molékulák 10-es arányszáma. A „csillag-gáz” tehát *sokkal hígabb,* mint a molekulákból álló valódi gázok.

6. Jelöljük az AB oldal felezőpontját F-fel, és tükrözzük erre a pontra a háromszöget.



A BCF és a BCC' derékszögű háromszögekre felírjuk a Pitagorasz-tételt:

$$a^2 + \overline{CF}^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2, \quad \text{illetve} \quad a^2 + (2\overline{CF})^2 = b^2.$$

[1] A kérdések a 39. oldalon találhatók.

Az első egyenlet négyszeresét kivonva a másodikból: $3a^2 = c^2 - b^2$.

7. A Möbius-szalag peremén vezetett drót kétmenetes (zárt) tekercset alkot, amelynek – az indukált feszültség szempontjából lényeges – területe sokkal nagyobb, mint a keskeny papírszalag területe. Így a megcsavart szalagnál az indukált feszültség sokkal nagyobb lehet, mint a csavarodásmentes esetben.

8. Számítsuk ki, hogy egy kályha 12 m^3 fát mennyi idő alatt éget el: $5{,}5 \cdot 9$ nap. Majd számítsuk ki, hogy 12 kályhában mennyi idő alatt ég el ugyanennyi fa: $5{,}5 \cdot \frac{9}{12}$. Akkor a 12 kályhában 9 m^3 bükkfa $\frac{9}{12}$-szer ennyi, vagyis $5{,}5 \cdot (\frac{9}{12})^2 = \frac{99}{32} = 3\frac{3}{32}$ nap, vagyis 3 nap 2 óra és 15 perc alatt ég el. (Ha 24 órát ötször elfelezzük, akkor 45 percet kapunk; $3 \cdot 45$ perc $= 135$ perc $= 2$ óra 15 perc.) Tehát 9 m^3 bükkfa 12 kályhában nem sokkal több, mint három nap alatt ég el.

9. A vízcseppre ható közegellenállási erő függőleges irányú komponense függ a hajó és a környező levegő vízszintes irányú sebességkülönbségétől. Ez a sebességkülönbség a parthoz képest mozgó hajó korlátjánál más, mint az álló hajónál, tehát az esés ideje is eltérő lehet. A hajó belsejében a levegő a medencéhez képest nem mozog, és ez a megállapítás független a hajó (parthoz viszonyított) sebességétől; itt tehát a Galilei-féle relativitáselv (nagyon precíz mérésekkel) ellenőrizhető.

10. A szabályos nyolcszöget megszerkesztjük és megszámoljuk a metszéspontokat.

11. Az elektrosztatikus mezőben azokon a helyeken, ahol nincs elektromos töltés, nem létezhet stabil egyensúlyi helyzet (*Samuel Earnshaw* (1805–1888) angol matematikus tétele). Ha ugyanis találnánk olyan P pontot, ahol egy pontszerű töltés stabil egyensúlyban maradna, akkor P kis környezetében az elektromos térerősség *mindenhol* P felé, vagy azzal ellentétes irányba mutatna, és ez *ellentmondana* Gauss fluxustörvényének. A tétel kiterjeszthető kiterjedt töltéseloszlásokra, valamint magnetosztatikus, illetve gravitációs erőterekre is, mivel azok törvényei ugyanolyan alakúak, mint az elektrosztatikus mezőé. Mágneses lebegtetés gravitációs erőtérben tehát (permanens mágnesekkel) *nem* valósítható meg. (A lebegő szupravezetőkre nem érvényes az Earnshaw-tétel, mert bennük örvényáramok indulhatnak, tehát nem permanens mágnesek.)

12. Összesen $\binom{5}{2} = 10$ mérkőzést játszanak, ezek lehetséges sorrendjeinek a száma 10!. Azoknak a meccssorozatoknak a száma, melyekben Pisti az összes mérkőzését egymás után játssza le 7!4!, mert az ő mérkőzéseit egy egységbe foglalva, 7! lehetőséget kapunk arra, hogy az így adódó 7 meccset lejátsszák; és 4! Pisti mérkőzéseinek lehetséges sorrendje. A keresett valószínűség tehát:

$$\frac{7!4!}{10!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{30}.$$

13. A hidrogénatomban ke^2/r_{Bohr} kb. 10^{-18} J = aJ nagyságrendű, egy elektron a Föld gravitációs terében pedig nagyságrendileg $GmM_F/R_{\text{Föld}} = mgR_{\text{Föld}} \approx 10^{-22}$ J energiával rendelkezik. Az elektrosztatikus kötésnél tehát az energia *abszolút értéke* sokkal nagyobb, mint a gravitációsan kötött rendszernél. Ha az energia negatív előjelét is figyelembe vesszük, akkor a Föld gravitációs terében keringő „szabad” elektron összenergiája lesz a nagyobb; az űrállomás atomjaiban kötött elektronok összes (elektrosztatikus+gravitációs+mozgási) energiája viszont egy nagyon kicsivel kisebb, mint a gravitációmentes térben levő atomok elektronjainak energiája.

13+1. Az egyenlet mindkét oldalához 1-et adva, a bal oldal szorzattá alakítható:

$$\begin{aligned} xyz + xy + yz + xz + x + y + z + 1 &= x(yz + y + z + 1) + (yz + y + z + 1) = \\ &= (x+1)(yz + y + z + 1) = (x+1)(y+1)(z+1). \end{aligned}$$

Így az eredeti egyenlettel ekvivalens a következő:

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 2013.$$

Mivel a tényezők mindegyike legalább 2, és 2013 prímfelbontása $3 \cdot 11 \cdot 61$, a három szám valamilyen sorrendben 2, 10 és 60, az összegük 72.